# EXERCICE 3

## [ Centres Étrangers 2016 ]

## Partie A:

**1. Calculons $U_1$ et $U_2$ en donnant le résultat arrondi à l'unité:**

- Il s'agit de calculer $U_1$.

$U_1 = (1 + 6\%)\, U_0 \iff U_1 = 1,06 \times 500$

$\Rightarrow U_1 = 530$ films.

Ainsi le nombre de films proposés, un mois après l'ouverture, est de:

530 films.

- Il s'agit de calculer $U_2$.

$U_2 = (1 + 6\%)\, U_1 \iff U_2 = 1,06 \times 530$

$\Rightarrow U_2 = 561,8$ cad $U_2 = 562$ films.

Ainsi le nombre de films proposés, deux mois après l'ouverture, est de:

562 films.

**2. Exprimons $U_n$ en fonction de $n$:**

- D'après l'énoncé, à l'ouverture, le nombre de films est de: 500.

D'où: $U_0 = 500$.

- De plus, chaque mois leur nombre augmente de 6%.

Ainsi, pour tout entier naturel n, le nombre de films en " n + 1 " est égal au nombre de films en " n " augmenté de 6%.

Donc pour tout entier naturel n:

$U_{n+1} = U_n + 6\%\ U_n \iff U_{n+1} = 1,06\ U_n$.

Ou encore: $U_n = U_0 \times (1,06)^n \Rightarrow U_n = 500 \times (1,06)^n$.

Nous sommes donc en présence d'une suite géométrique de raison $q = 1,06$ et de premier terme $U_0 = 500$.

**3. Déterminons la limite de la suite $(U_n)$:**

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} 500 \times (1,06)^n$$

$$= +\infty \quad \text{car:} \quad 1,06 > 1.$$

Donc:
- La suite $(U_n)$ est divergente.
- Au bout de n mois (" n " très grand), le nombre de films proposés tendra vers l'infini.

## Partie B:

**1. Recopions et complétons les lignes $L_3$, $L_5$ et $L_7$:**

Les lignes $L_3$, $L_5$ et $L_7$ complétées sont les suivantes:

- $L_3$: Traitement Tant que $U < 1000$
- $L_5$: Affecter à $U$ la valeur $U \times 1,06$
- $L_7$: Sortie Afficher N

**2. Calculons le nombre de mois recherché:**

Il s'agit de résoudre l'inéquation: $U_n \geqslant 1000$. $(2 \times 500)$

$U_n \geqslant 1000 \iff 500 \times (1,06)^n \geqslant 1000$

$\iff (1,06)^n \geqslant 2$

$\iff n \ln(1,06) \geqslant \ln(2)$

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln(2)}{\ln(1,06)}$, car: $1,06 > 1$, et donc: $\ln(1,06) > 0$

$\Rightarrow n \geqslant 11,8956.$

Nous prendrons $n = 12$ car $n$ est un entier naturel.

Ainsi, 12 mois après l'ouverture, le nombre de films proposés aura doublé pour atteindre 1000 films.

## Partie C:

**1. Justifions que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = 0,9 \times V_n + 2500$:**

- D'après l'énoncé, à l'ouverture, le nombre d'abonnés est de: 15000.

D'où: $V_0 = 15000$.

- De plus, chaque mois leur nombre baisse de 10% et 2500 nouveaux abonnés sont enregistrés.

Soient:
- $V_{n+1}$, le nombre d'abonnés au mois " ouverture + (n + 1) ",
- $V_n$, le nombre d'abonnés au mois " ouverture + (n) ".

Pour tout entier naturel n, le nombre $V_{n+1}$ d'abonnés est égal au nombre $V_n$ d'abonnés diminué de 10% et augmenté de 2500 " nouveaux abonnés ".

Donc pour tout entier naturel $n$:

$V_{n+1} = V_n - 10\%\ V_n + 2\,500 \iff V_{n+1} = 0,9\ V_n + 2\,500.$

**2. a. Montrons que $(W_n)$ est géométrique et déterminons $W_0$ et $q$:**

$W_n = V_n - 25\,000 \iff W_{n+1} = V_{n+1} - 25\,000$

$\iff W_{n+1} = (0,9\ V_n + 2\,500) - 25\,000.\quad (1)$

Or: $W_0 = V_0 - 25\,000 \Rightarrow W_0 = -\ 10\,000$ et $V_n = W_n + 25\,000.$

Ainsi: $(1) \iff W_{n+1} = (0,9\,[W_n + 25\,000] + 2\,500) - 25\,000$

$\Rightarrow W_{n+1} = 0,9\ W_n.$

Par conséquent, $(W_n)$ est bien une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $W_0 = -\ 22\,500.$

**2. b. Déduisons-en que pour tout entier $n$, $V_n = 25\,000 - 10\,000 \times 0,9^n$:**

- Comme $W_{n+1} = 0,9\ W_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$W_n = W_0 \times (0,9)^n,$ avec: $W_0 = -\ 10\,000.$

- De plus, nous savons que: $*\ W_n = -\ 10\,000 \times (0,9)^n$

$*\ V_n = W_n + 25\,000.$

D'où: $V_n = 25\,000 - 10\,000 \times (0,9)^n.$

**2. c. Stabilisation du nombre d'abonnés sur le long terme ?**

Pour répondre à cette question, nous allons calculer la limite de la suite $(V_n)$ quand $n$ tend vers l'infini.

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} 25\,000 - 10\,000 \times (0,9)^n$$

$$= 25\,000 \quad \text{car: } \lim_{n \to +\infty} (0,9)^n = 0, \quad \text{car: } 0,9 \in \,]0, 1[.$$

Donc: • La suite $(V_n)$ est convergente et converge vers 25 000.

• Au bout de n mois (" n " très grand), le nombre d'abonnés tendra vers 25 000.

• D'où: oui, il y aura stabilisation du nombre d'abonnés sur le long terme et ce nombre sera égal à: 25 000 abonnés.