# Corrigé

## Exercice 3

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

## Session 2016

## MATHÉMATIQUES
## - Série ES -

## ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

***Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 5***

## MATHÉMATIQUES
## - Série L -

## ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

***Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 4***

***Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,***
***conformément à la réglementation en vigueur.***

***Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.***
***Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.***
***Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.***
***Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.***

*Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.*

**EXERCICE 3** **5 points**

**Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L**

Un site internet propose à ses abonnés des films à télécharger.
Lors de son ouverture, 500 films sont proposés et chaque mois, le nombre de films proposés aux abonnés augmente de 6 %.

**Partie A**

On modélise le nombre de films proposés par une suite géométrique $(u_n)$ où $n$ désigne le nombre de mois depuis l'ouverture du site. On a donc $u_0 = 500$.

1. Calculer $u_1$ et $u_2$ et donner le résultat arrondi à l'unité.
2. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
3. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**Partie B**

Dans cette partie, on souhaite déterminer à partir de combien de mois le site aura doublé le nombre de films proposés par rapport au nombre de films proposés à l'ouverture.

1. On veut déterminer cette valeur à l'aide d'un algorithme.
   Recopier et compléter les lignes L3, L5 et L7 pour que l'algorithme donne le résultat attendu.

| | | |
|---|---|---|
| L1 : | **Initialisation** | Affecter à $U$ la valeur 500 |
| L2 : | | Affecter à $N$ la valeur 0 |
| L3 : | **Traitement** | Tant que $U$ ...... |
| L4 : | | Affecter à $N$ la valeur $N+1$ |
| L5 : | | Affecter à $U$ la valeur ...... |
| L6 : | | Fin Tant que |
| L7 : | **Sortie** | Afficher ...... |

2. On veut maintenant utiliser une méthode algébrique Calculer le nombre de mois recherché.

**Partie C**

En raison d'une offre de bienvenue, le nombre d'abonnés au lancement est 15 000. Sur la base des premiers mois, on estime que le nombre des clients abonnés au site évolue suivant la règle suivante :
chaque mois, 10 % des clients se désabonnent et 2 500 nouveaux abonnés sont enregistrés.
On note $v_n$ l'estimation du nombre d'abonnés $n$ mois après l'ouverture, on a ainsi $v_0 = 15000$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel $n$, on a $v_{n+1} = 0,9 \times v_n + 2500$.
2. On considère la suite $(w_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $w_n = v_n - 25000$.
   **a.** Montrer que la suite $(w_n)$ est géométrique de raison 0,9 et préciser son premier terme.
   **b.** En déduire que, pour tout entier $n$, $v_n = 25000 - 10000 \times 0,9^n$.
   **c.** Peut-on prévoir, à l'aide de ce modèle, une stabilisation du nombre d'abonnés sur le long terme ? Justifier la réponse.

# EXERCICE 3

## [ Centres Étrangers 2016 ]

### Partie A:

**1. Calculons $U_1$ et $U_2$ en donnant le résultat arrondi à l'unité:**

• Il s'agit de calculer $U_1$.

$U_1 = (1 + 6\%)\, U_0 \iff U_1 = 1,06 \times 500$

$\Rightarrow U_1 = 530$ films.

Ainsi le nombre de films proposés, un mois après l'ouverture, est de:

530 films.

• Il s'agit de calculer $U_2$.

$U_2 = (1 + 6\%)\, U_1 \iff U_2 = 1,06 \times 530$

$\Rightarrow U_2 = 561,8$ cad $U_2 = 562$ films.

Ainsi le nombre de films proposés, deux mois après l'ouverture, est de:

562 films.

**2. Exprimons $U_n$ en fonction de $n$:**

• D'après l'énoncé, à l'ouverture, le nombre de films est de: 500.

D'où: $U_0 = 500$.

• De plus, chaque mois leur nombre augmente de 6%.

Ainsi, pour tout entier naturel n, le nombre de films en " n + 1 " est égal au nombre de films en " n " augmenté de 6%.

Donc pour tout entier naturel n:

$U_{n+1} = U_n + 6\%\ U_n \iff U_{n+1} = 1,06\, U_n$.

Ou encore: $U_n = U_0 \times (1,06)^n \Rightarrow U_n = 500 \times (1,06)^n$.

Nous sommes donc en présence d'une suite géométrique de raison $q = 1,06$ et de premier terme $U_0 = 500$.

**3. Déterminons la limite de la suite $(U_n)$:**

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} 500 \times (1,06)^n$$

$$= +\infty \quad \text{car:} \quad 1,06 > 1.$$

Donc: • La suite $(U_n)$ est divergente.

• Au bout de n mois (" n " très grand), le nombre de films proposés tendra vers l'infini.

## Partie B:

**1. Recopions et complétons les lignes $L_3$, $L_5$ et $L_7$:**

Les lignes $L_3$, $L_5$ et $L_7$ complétées sont les suivantes:

| | | |
|---|---|---|
| • $L_3$: | Traitement | Tant que $U < 1000$ |
| • $L_5$: | | Affecter à $U$ la valeur $U \times 1,06$ |
| • $L_7$: | Sortie | Afficher N |

**2. Calculons le nombre de mois recherché:**

Il s'agit de résoudre l'inéquation: $U_n \geqslant 1000$. (2 x 500)

$U_n \geqslant 1000 \iff 500 \times (1,06)^n \geqslant 1000$

$\iff (1,06)^n \geqslant 2$

$\iff n \ln(1,06) \geqslant \ln(2)$

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln(2)}{\ln(1,06)}$, car: $1,06 > 1$, et donc: $\ln(1,06) > 0$

$\implies n \geqslant 11,8956.$

Nous prendrons $n = 12$ car $n$ est un entier naturel.

Ainsi, 12 mois après l'ouverture, le nombre de films proposés aura doublé pour atteindre 1000 films.

## Partie C:

**1. Justifions que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = 0,9 \times V_n + 2500$:**

• D'après l'énoncé, à l'ouverture, le nombre d'abonnés est de: 15000.

D'où: $V_0 = 15000$.

• De plus, chaque mois leur nombre baisse de 10% et 2500 nouveaux abonnés sont enregistrés.

Soient: • $V_{n+1}$, le nombre d'abonnés au mois " ouverture + (n + 1) ",

• $V_n$, le nombre d'abonnés au mois " ouverture + (n) ".

Pour tout entier naturel n, le nombre $V_{n+1}$ d'abonnés est égal au nombre $V_n$ d'abonnés diminué de 10% et augmenté de 2500 " nouveaux abonnés ".

Donc pour tout entier naturel n:

$V_{n+1} = V_n - 10\% \, V_n + 2500 \iff V_{n+1} = 0,9 \, V_n + 2500.$

**2. a. Montrons que ($W_n$) est géométrique et déterminons $W_0$ et $q$:**

$W_n = V_n - 25000 \iff W_{n+1} = V_{n+1} - 25000$

$\iff W_{n+1} = (0,9 \, V_n + 2500) - 25000. \quad (1)$

Or: $W_0 = V_0 - 25000 \Rightarrow W_0 = -10000$ et $V_n = W_n + 25000.$

Ainsi: $(1) \iff W_{n+1} = (0,9 \, [W_n + 25000] + 2500) - 25000$

$\Rightarrow W_{n+1} = 0,9 \, W_n.$

Par conséquent, ($W_n$) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $W_0 = -22500.$

**2. b. Déduisons-en que pour tout entier n, $V_n = 25000 - 10000 \times 0,9^n$:**

- Comme $W_{n+1} = 0,9 \, W_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$W_n = W_0 \times (0,9)^n$, avec: $W_0 = -10000.$

- De plus, nous savons que: $\ast \; W_n = -10000 \times (0,9)^n$

$\ast \; V_n = W_n + 25000.$

D'où: $V_n = 25000 - 10000 \times (0,9)^n.$

**2. c. Stabilisation du nombre d'abonnés sur le long terme ?**

Pour répondre à cette question, nous allons calculer la limite de la suite ($V_n$) quand n tend vers l'infini.

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} 25000 - 10000 \times (0,9)^n$$

$$= 25000 \quad \text{car: } \lim_{n \to +\infty} (0,9)^n = 0, \quad \text{car: } 0,9 \in \,]0, 1[.$$

Donc:
- La suite $(V_n)$ est convergente et converge vers 25 000.
- Au bout de n mois (" n " très grand), le nombre d'abonnés tendra vers 25 000.
- D'où: oui, il y aura stabilisation du nombre d'abonnés sur le long terme et ce nombre sera égal à: 25 000 abonnés.