

EXERCICE 2

[Centres Étrangers 2016]

Partie A: Les pneus

1. Illustrons la situation à l'aide d'un arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

- N = " le pneu choisi est un pneu neige ".
- C = " le pneu choisi est un pneu classique ".
- Q = " le pneu choisi a réussi les tests ".
- \bar{Q} = " le pneu choisi a échoué les tests ".

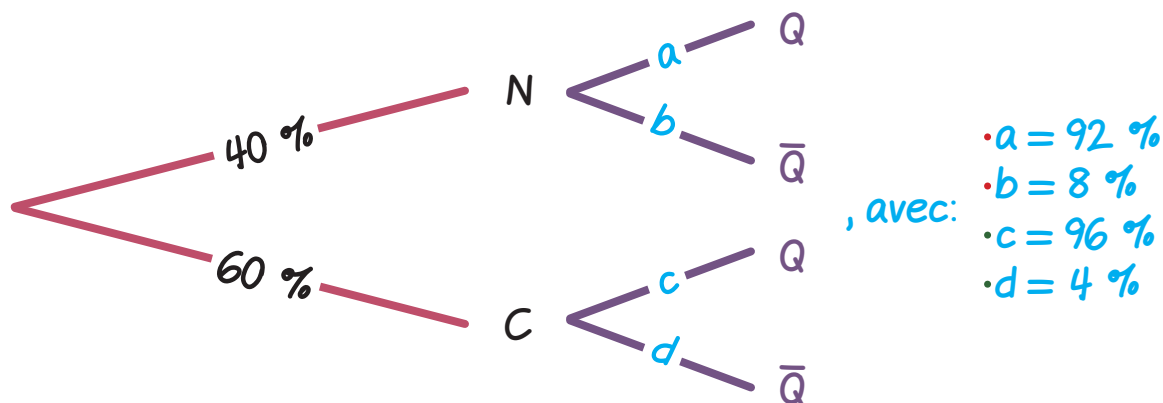
- $P(N) = 40\%$
- $P(C) = 60\%$
($40\% + 60\% = 1$).

- $P_N(Q) = 92\%$
- $P_N(\bar{Q}) = 8\%$
($92\% + 8\% = 1$).

- $P_C(Q) = 96\%$
- $P_C(\bar{Q}) = 4\%$
($96\% + 4\% = 1$).

Nous allons illustrer la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

D'où l'arbre pondéré suivant:



2. Calculons et interprétons $P(N \cap Q)$:

$$P(N \cap Q) = P_N(Q) \times P(N).$$

$$\text{Ainsi: } P(N \cap Q) = 92\% \times 40\% \Rightarrow P(N \cap Q) = 36.8\%.$$

Cela signifie qu'il y a 36.8% de chance pour que le pneu soit un " pneu neige " et qu'il réussisse les tests de qualité.

3. Montrons que $P(Q) = 0.944$:

$$\text{L'événement } Q = (Q \cap N) \cup (Q \cap C).$$

$$\begin{aligned} \text{D'où: } P(Q) &= P(Q \cap N) + P(Q \cap C) \\ &= P(N \cap Q) + P_C(Q) \times P(C). \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi: } P(Q) = 36.8\% + 96\% \times 60\%$$

$$\Rightarrow P(Q) = 94.4\%.$$

La probabilité demandée est de: 94.4%.

4. Déterminons la probabilité que ce pneu soit un pneu neige:

Cela revient à calculer: $P_Q(N)$.

$$\text{Or: } P_Q(N) = \frac{P(Q \cap N)}{P(Q)}$$

$$\text{Ainsi: } P_Q(N) = \frac{36,8\%}{94,4\%} \Rightarrow P(Q) = 39\%$$

La probabilité demandée est de: 39%.



freemaths.fr

EXERCICE 2

[Centres Étrangers 2016]

Partie B: La durée de vie d'un pneu

1. Déterminons la probabilité qu'un pneu classique ait une durée de vie inférieure à 25 milliers de kilomètres:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X est la variable aléatoire qui correspond à la durée de vie d'un pneu classique (en milliers de kilomètres).
- X suit la loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart type $\sigma = 8$.
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de calculer: $P(X \leq 25)$.

$$\begin{aligned} P(X \leq 25) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{25 - 30}{8}\right) \\ &= P(T \leq -0,625) \\ &= 1 - P(T \leq 0,625). \end{aligned}$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(X \leq 25) \approx 0,266.$$

Au total, la probabilité qu'un pneu classique ait une durée de vie inférieure à 25 milliers de kilomètres est de: 26,6%.

2. Déterminons la valeur de " d " telle que $P(X \geq d) = 20\%$:

$$P(X \geq d) = 20\% \Leftrightarrow P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{d - 30}{8}\right) = 20\%$$

$$\Leftrightarrow P\left(T \geq \frac{d - 30}{8}\right) = 20\%$$

$$\Leftrightarrow 1 - P\left(T \leq \frac{d - 30}{8}\right) = 20\%$$

$$\Rightarrow P\left(T \leq \frac{d - 30}{8}\right) = 80\%.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\frac{d - 30}{8} \approx 0,8416 \Rightarrow d \approx 36,733.$$

Au total, la valeur recherchée pour " d " est d'environ:

$$36,733 \text{ kilomètres} \times 10^3.$$

Partie C: Une enquête de satisfaction

Déterminons en argumentant la décision du directeur:

- Ici, nous avons:
- $n = 900$
 - $p = 85\%$
 - $f = \frac{735}{900} \Rightarrow f \approx 81,7\%$.

Dans ces conditions:

$$n = 900 \geq 30, n \cdot p = 765 \geq 5 \text{ et } n \cdot (1 - p) = 135 \geq 5.$$

Les conditions sont donc réunies et on suppose que le taux de satisfaction reste le même que celui de l'année précédente.

On choisit un échantillon aléatoire de 900 personnes parmi les clients.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1,96 \times \left(\frac{p(1-p)}{n} \right)^{1/2} ; p + 1,96 \times \left(\frac{p(1-p)}{n} \right)^{1/2} \right],$$

$$\text{cad: } I = \left[0,85 - 1,96 \times \left(\frac{0,85 \times 0,15}{900} \right)^{1/2} ; 0,85 + 1,96 \times \left(\frac{0,85 \times 0,15}{900} \right)^{1/2} \right].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [82,6\% ; 87,4\%]$.

Or la fréquence de clients satisfaits " f ", sur l'échantillon, est telle que:

$$f \approx 81,7\% \notin I.$$

Ainsi, le directeur affirmera que le taux de satisfaction n'est pas maintenu.