EXERCICE 2

[Centres Étrangers 2015]

1. Déterminons le nombre de vélos au 1er janvier 2016:

Il s'agit de calculer U_1.

$U_1 = (1 - 15\%)\ U_0 + 42 \iff U_1 = 0,85 \times 200 + 42$

$\implies U_1 = 216$ vélos.

Ainsi, au 1er janvier 2016, il y aura: 216 vélos.

2. Justifions que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 0,85 \times U_n + 42$:

• D'après l'énoncé, au 1er janvier 2015, la commune disposait de 200 vélos.

D'où: $U_0 = 200$.

• De plus, chaque année leur nombre baisse de 15% et augmente de 40 nouvelles unités.

Soient: • U_{n+1}, le nombre de vélos au 1er janvier $(2015 + (n + 1))$,

• U_n, le nombre de vélos au 1er janvier $(2015 + (n))$.

Pour tout entier naturel n, le nombre U_{n+1} de vélos est égal au nombre U_n de vélos diminué de 15% et augmenté de 42 " nouveaux vélos. "

Donc pour tout entier naturel n:

$U_{n+1} = U_n - 15\%\ U_n + 42 \iff U_{n+1} = 0,85\ U_n + 42$.

3. a. • Recopions et complétons le tableau en arrondissant à l'unité:

Le tableau complété est le suivant:

Valeur de U	200	212	222	231	238
Valeur de N	0	1	2	3	4
Condition N < 4	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

• Déterminons le nombre obtenu à l'arrêt de l'algorithme:

Le nombre obtenu, à l'arrêt de l'algorithme, est: $U = 238$, pour $N = 4$.

3. b. Interprétons la valeur de U obtenue:

Cela signifie que la commune possédera 238 vélos en 2019 (2015 + 4).

4. a. Montrons que (V_n) est géométrique et déterminons V_0 et q:

$$V_n = U_n - 280 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 280$$
$$\iff V_{n+1} = (0,85\ U_n + 42) - 280 \quad (1).$$

Or: $V_0 = U_0 - 280 \Rightarrow V_0 = -80$ et $U_n = V_n + 280$.

Ainsi: $(1) \iff V_{n+1} = (0,85\,[V_n + 280] + 42) - 280$

$$\Rightarrow V_{n+1} = 0,85\ V_n.$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $V_0 = -80$.

4. b. Exprimons V_n en fonction de n:

Comme $V_{n+1} = 0,85\ V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 \times (0,85)^n, \quad \text{avec: } V_0 = -80.$$

4. c. Déduisons-en que pour tout entier naturel n, $U_n = -80 \times (0,85)^n + 280$:

Nous savons que: * $V_n = -80 \times (0,85)^n$

* $U_n = V_n + 280.$

D'où: $U_n = -80 \times (0,85)^n + 280.$

4. d. Calculons la limite de (U_n) et interprétons:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} -80 \times (0,85)^n + 280$$

$$= 280 \quad \text{car: } \lim_{n \to +\infty} (0,85)^n = 0, \quad \text{car: } 0,85 \in]0,1[.$$

Donc:
- La suite (U_n) est convergente et converge vers 280 vélos.
- Au bout de n années (" n " très grand), le nombre de vélos tendra vers 280 vélos.

5. Déterminons le coût total du 1[er] janvier 2015 au 31 décembre 2019:

Soit CT, le coût total.

$CT = 300\,(U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4).$

D'où: $CT = 300\,(200 + 212 + 222 + 231 + 238),$

cad: $CT = 330\,900$ €.

Ainsi le coût total du 1[er] janvier 2015 au 31 décembre 2019 est de: 330 900 €.