Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2015

MATHÉMATIQUES
- Série ES -

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES
- Série L -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 4

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Depuis le 1er janvier 2015, une commune dispose de vélos en libre service. La société Bicycl'Aime est chargée de l'exploitation et de l'entretien du parc de vélos.
La commune disposait de 200 vélos au 1er janvier 2015.
La société estime que, chaque année, 15 % des vélos sont retirés de la circulation à cause de dégradations et que 42 nouveaux vélos sont mis en service.
On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de vélos de cette commune au 1er janvier de l'année $2015 + n$.

1. Déterminer le nombre de vélos au 1er janvier 2016.
2. Justifier que la suite (u_n) est définie par $u_0 = 200$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 0{,}85u_n + 42.$$

3. On donne l'algorithme suivant :

Variables :	N entier
	U réel
Initialisation :	N prend la valeur 0
	U prend la valeur 200
Traitement :	Tant que $N < 4$
	U prend la valeur $0{,}85 \times U + 42$
	N prend la valeur $N + 1$
	Fin tant que
Sortie :	Afficher U

   a. Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les résultats à l'unité. Quel nombre obtient-on à l'arrêt de l'algorithme ?

U	200				
N	0	1	2	3	4
Condition $N < 4$	Vrai				

   b. Interpréter la valeur du nombre U obtenue à l'issue de l'exécution de cet algorithme.

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 280$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,85 et de premier terme $v_0 = -80$.
   b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = -80 \times 0{,}85^n + 280$.
   d. Calculer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat.
5. La société Bicycl'Aime facture chaque année à la commune 300 € par vélo en circulation au 1er janvier.
   Déterminer le coût total pour la période du 1er janvier 2015 au 31 décembre 2019, chacun des termes utilisés de la suite (u_n) étant exprimé avec un nombre entier.

EXERCICE 2

[Centres Étrangers 2015]

1. Déterminons le nombre de vélos au 1er janvier 2016:

Il s'agit de calculer U_1.

$U_1 = (1 - 15\%)\ U_0 + 42 \iff U_1 = 0,85 \times 200 + 42$

$\Rightarrow U_1 = 216$ vélos.

Ainsi, au 1er janvier 2016, il y aura: 216 vélos.

2. Justifions que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 0,85 \times U_n + 42$:

- D'après l'énoncé, au 1er janvier 2015, la commune disposait de 200 vélos.

D'où: $U_0 = 200$.

- De plus, chaque année leur nombre baisse de 15% et augmente de 40 nouvelles unités.

Soient:
- U_{n+1}, le nombre de vélos au 1er janvier (2015 + (n + 1)),
- U_n, le nombre de vélos au 1er janvier (2015 + (n)).

Pour tout entier naturel n, le nombre U_{n+1} de vélos est égal au nombre U_n de vélos diminué de 15% et augmenté de 42 " nouveaux vélos. "

Donc pour tout entier naturel n:

$U_{n+1} = U_n - 15\%\ U_n + 42 \iff U_{n+1} = 0,85\ U_n + 42$.

3. a. • Recopions et complétons le tableau en arrondissant à l'unité:

Le tableau complété est le suivant:

Valeur de U	200	212	222	231	238
Valeur de N	0	1	2	3	4
Condition $N < 4$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

• Déterminons le nombre obtenu à l'arrêt de l'algorithme:

Le nombre obtenu, à l'arrêt de l'algorithme, est: $U = 238$, pour $N = 4$.

3. b. Interprétons la valeur de U obtenue:

Cela signifie que la commune possédera 238 vélos en 2019 (2015 + 4).

4. a. Montrons que (V_n) est géométrique et déterminons V_0 et q:

$V_n = U_n - 280 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 280$

$\iff V_{n+1} = (0,85\ U_n + 42) - 280$ (1).

Or: $V_0 = U_0 - 280 \Rightarrow V_0 = -80$ et $U_n = V_n + 280$.

Ainsi: (1) $\iff V_{n+1} = (0,85\,[V_n + 280] + 42) - 280$

$\Rightarrow V_{n+1} = 0,85\ V_n$.

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $V_0 = -80$.

4. b. Exprimons V_n en fonction de n:

Comme $V_{n+1} = 0,85\ V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$V_n = V_0 \times (0,85)^n$, avec: $V_0 = -80$.

4. c. Déduisons-en que pour tout entier naturel n, $U_n = -80 \times (0,85)^n + 280$:

Nous savons que: * $V_n = -80 \times (0,85)^n$

* $U_n = V_n + 280$.

D'où: $U_n = -80 \times (0,85)^n + 280$.

4. d. Calculons la limite de (U_n) et interprétons:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} -80 \times (0,85)^n + 280$$

$$= 280 \quad \text{car: } \lim_{n \to +\infty} (0,85)^n = 0, \quad \text{car: } 0,85 \in]0, 1[.$$

Donc: • La suite (U_n) est convergente et converge vers 280 vélos.

• Au bout de n années (" n " très grand), le nombre de vélos tendra vers 280 vélos.

5. Déterminons le coût total du 1er janvier 2015 au 31 décembre 2019:

Soit CT, le coût total.

$CT = 300\,(U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4)$.

D'où: $CT = 300\,(200 + 212 + 222 + 231 + 238)$,

cad: $CT = 330\,900$ €.

Ainsi le coût total du 1er janvier 2015 au 31 décembre 2019 est de: 330 900 €.