Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série ES

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 7 (ES)**

ES : ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur

• *Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.*
• *Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*
• *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
• *Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

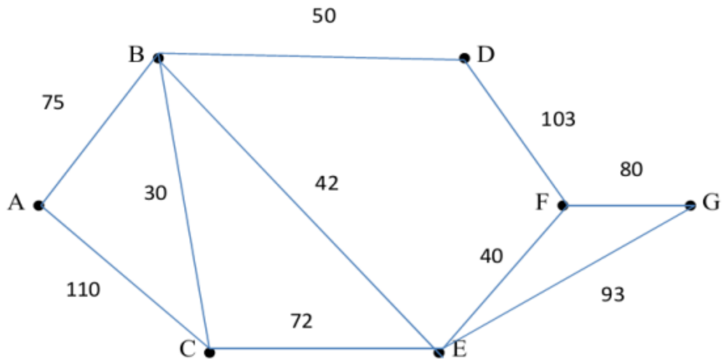
Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte **6 pages numérotées de 1 / 6 à 6 / 6**

EXERCICE 2 **(5 points)** **Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Le graphe ci-dessous représente le plan d'un centre de vacances. Les arêtes représentent les allées et les sommets, les carrefours.
On a indiqué sur chaque arête la longueur en mètre des allées entre deux carrefours.



1. Le service d'entretien doit nettoyer toutes les allées. En partant du carrefour C, peut-on nettoyer toutes les allées en passant une et une seule fois par chacune d'elles ? Justifier la réponse.

2. Existe-t-il un parcours permettant de nettoyer toutes les allées en passant une et une seule fois par chacune d'elles et de revenir au point de départ ? Justifier la réponse.

3. Déterminer le trajet le plus court pour aller du carrefour A au carrefour G.

Partie B

Dans ce centre de vacances, les vacanciers peuvent, chaque jour, déjeuner au restaurant du centre ou à l'extérieur. On constate chaque jour que :

- 5 % des vacanciers ayant déjeuné au centre de vacances ne se réinscrivent pas pour le lendemain ;
- 20 % des vacanciers ayant déjeuné à l'extérieur s'inscrivent pour déjeuner au centre de vacances le lendemain.

On note D l'état « Déjeuner au centre de vacances » et E l'évènement « Déjeuner à l'extérieur ».

1. Construire un graphe modélisant cette situation.

2. Écrire la matrice de transition de ce graphe, les sommets étant rangés selon l'ordre alphabétique.

3. Le premier jour, le quart des vacanciers a déjeuné au centre de vacances. Quel pourcentage de vacanciers déjeunera au centre de vacances le deuxième jour ? Le cinquième jour ?

4. L'état $(0{,}5 \quad 0{,}5)$ est-il stable ?

5. Peut-on affirmer qu'à terme, si les comportements des vacanciers restent les mêmes, 75 % des vacanciers prendront leur déjeuner au centre ?

EXERCICE 2

[Antilles-Guyane 2017]

Partie A:

1. **Peut-on nettoyer toutes les allées en passant une et une seule fois par chacune d'elles ?**

Cela revient à déterminer si le graphe admet une chaîne eulérienne.

Ici, le graphe G (**d'ordre 7**) est connexe car il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.

De plus d'après le cours:

G étant un graphe connexe, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- Deux sommets (et deux seulement) X et Y de G sont de degré impair.
- G admet une chaîne eulérienne d'extrémités X et Y.

Ici, le tableau des sommets degrés est le suivant:

Sommets	A	B	C	D	E	F	G
Degrés	2	4	3	2	4	3	2

Il y a donc 2 sommets C et F de degré impair.

Par conséquent: le graphe admet une chaîne eulérienne.

Ainsi, d'après le théorème d'**Euler**: **oui**, il est possible de nettoyer toutes les allées en passant une et une seule fois par chacune d'elles.

2. Existe-t-il un tel parcours ?

Ce parcours existe ssi nous sommes en présence d'un cycle eulérien.

Or, d'après le cours: **un cycle eulérien** est une chaîne eulérienne fermée composée d'arêtes toutes distinctes.

Comme ici il y a 2 sommets C et F de degré impair, nous ne sommes pas en présence d'un cycle eulérien qui nécessite que tous les sommets soient de degré pair.

Au total: un tel parcours n'existe pas.

3. Déterminons le trajet le plus court pour aller de A à G:

Après recours à l'algorithme de **Dijkstra**, nous trouvons comme trajet le plus court (minimisation de la distance) pour aller de A à G:

le trajet A - B - E - G.

Et ce trajet aura pour distance: $75 + 42 + 93 = 210$ mètres.

Au total, le trajet le plus court pour aller de A à G est:

A - B - E - G, et il aura pour longueur 210 mètres.

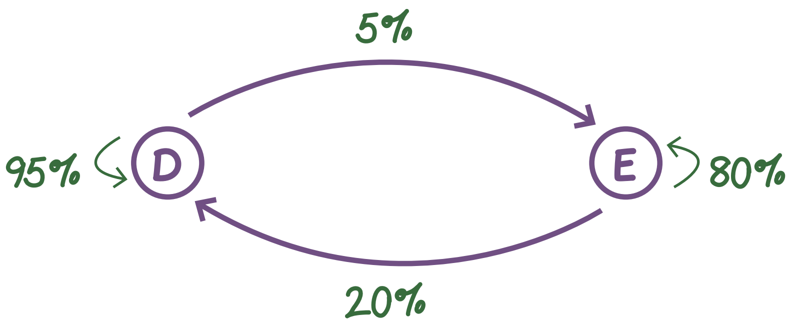
Partie B:

1. Construisons un graphe modélisant la situation:

Soient: • D, l'état: " Déjeuner au centre de vacances ",

• E, l'état: " Déjeuner à l'extérieur ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:



2. Ecrivons la matrice M associée à ce graphe:

La matrice associée à ce graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 95\% & 5\% \\ 20\% & 80\% \end{pmatrix}.$$

3. a. Déterminons le pourcentage qui déjeunera au centre des vacances le second jour:

Cela revient à calculer P_2.

D'après le cours: $P_2 = P_1 \times M^{(2-1)}$ cad $P_2 = P_1 \times M$.

Or: $P_1 = (25\% \quad 75\%)$ car " **Le premier jour, le quart des vacanciers a déjeuné au centre de vacances** ".

Ainsi: $P_2 = (25\% \quad 75\%)\begin{pmatrix} 95\% & 5\% \\ 20\% & 80\% \end{pmatrix}$ => $P_2 = (38,75\% \quad 61,25\%)$.

Au total: 38, 75% des vacanciers déjeunera au centre de vacances le second jour.

3. b. Déterminons le pourcentage qui déjeunera au centre de vacances le cinquième jour:

Cela revient à déterminer " x ", avec x tel que: $P_5 = (x \quad y)$.

D'après le cours: $P_5 = P_4 \times M^{(5-4)}$ <=> $P_5 = P_4 \times M^1$

$$\Longleftrightarrow \quad P_5 = (P_3 \times M) \times M$$

$$\Longleftrightarrow \quad P_5 = P_3 \times M^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad P_5 = (P_2 \times M) \times M^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad P_5 = P_2 \times M^3$$

$$\Longleftrightarrow \quad P_5 = (P_1 \times M) \times M^3$$

$$\Longrightarrow \quad P_5 = P_1 \times M^4.$$

A l'aide d'une calculatrice, nous obtenons: $P_5 \approx (62,6\% \quad 37,4\%)$.

Ainsi: environ $x = 62,6\%$ des vacanciers déjeunera au centre de vacances le $5^{ème}$ jour.

4. Déterminons si l'état $(0,5 \quad 0,5)$ est stable:

Soit P l'état stable de ce graphe.

P vérifie: $P = P \times M$, car l'état stable P est l'unique solution de l'équation

$$P = P \times M.$$

Posons: $X = (0,5 \quad 0,5)$.

$$X \times M = (0,5 \quad 0,5)\begin{pmatrix} 95\% & 5\% \\ 20\% & 80\% \end{pmatrix} \Longrightarrow X \times M = (57,5\% \quad 42,5\%).$$

Comme: $X \times M \neq X$, l'état $(0,5 \quad 0,5)$ n'est pas stable.

5. A terme, 75% des vacanciers prendront-ils leur déjeuner au centre ?

A long terme, l'état P_n à l'étape n converge vers P un état stable indépendant de l'état initial P_0.

Or l'état stable P indique, entre autre, au bout de n années (" n très grand ") le pourcentage de vacanciers qui prendront leur déjeuner au centre.

Nous allons donc déterminer $P = (x \quad y)$ et comparer x à 75%.

D'après le cours, nous savons que l'état stable P est l'unique solution de l'équation: $P = P \times M$.

Soit $P = (x \quad y)$, $P = P \times M \iff (x \quad y) = (x \quad y)\begin{pmatrix} 95\% & 5\% \\ 20\% & 80\% \end{pmatrix}$

$$\iff (x \quad y) = (0,95x + 0,2y \quad 0,05x + 0,8y)$$

$$\iff \begin{cases} 0,95x + 0,2y = x \\ 0,05x + 0,8y = y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -0,05x + 0,2y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0,8 \\ y = 0,2 \end{cases}, \text{ et donc: } \quad P = (80\% \quad 20\%).$$

Comme $x = 0,8$, à long terme, 80% des vacanciers prendront leur déjeuner au centre.

Comme: $80\% \neq 75\%$, la réponse est **non**.