EXERCICE 3

[Antilles - Guyane 2016]

Partie A: Étude Graphique

1. Résolvons graphiquement $f(x) > 0$:

Graphiquement, $f(x) > 0$ à partir du moment où: $x > 0,5$.

Au total: $f(x) > 0$ ssi $x \in]0,5;6]$.

2. Donnons la valeur approchée du maximum de f sur l'intervalle $[0;6]$:

Graphiquement, le maximum de f est atteint quand $x = 1,5$.

Quand $x = 1,5$, $f(x) \in [2;2,5]$.

Au total, une valeur approchée du maximum de f sur $[0;6]$ est: $y_{max} \approx 2,25$.

3. Déterminons, en justifiant, le signe de f' sur $[2;6]$:

Graphiquement, la courbe représentative de f décroît sur $[2;6]$.

D'où, f est décroissante sur $[2;6]$ et ainsi nous pouvons affirmer que:

$$\text{pour tout } x \in [2;6],\quad f'(x) < 0.$$

Au total: pour tout $x \in [2;6]$, $f'(x) < 0$.

4. Déterminons pour quelle raison on peut penser que la courbe admet un point d'inflexion:

Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Graphiquement, sur $[0;2]$, la courbe est située sous ses tangentes et, sur $[3,5;6]$, elle est située au dessus de ses tangentes.

Il semble donc que sur l'intervalle $[0;6]$, et plus exactement sur $[2;6]$, la fonction va passer de concave à convexe.

D'où, f'' va s'annuler et changer de signe et ainsi nous pouvons affirmer que:

f admet un point d'inflexion sur l'intervalle $[2;6]$.

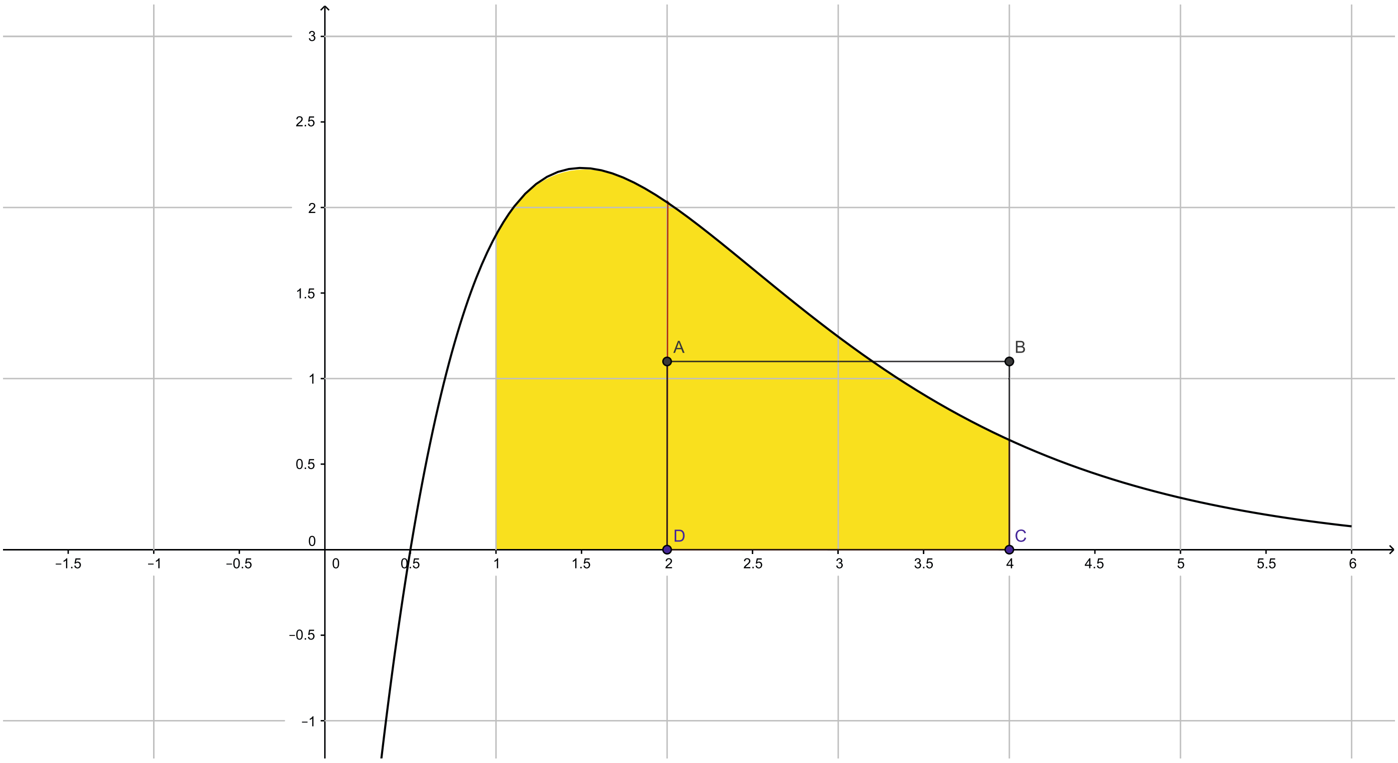
Au total: f admet donc un point d'inflexion.

5. Donnons un encadrement par 2 entiers consécutifs de $\mathscr{A} = \int_1^4 f(x)\,dx$:

Soit $\mathscr{A}$ l'aire correspondante à: $\int_1^4 f(x)\,dx$.

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$, est telle que: $4 < \mathscr{A} < 5$.

Nous pouvons représenter cette aire $\mathscr{A}$, en jaune, sur le graphique suivant:



Au total , l'aire demandée $\mathcal{A}$ est telle que: $4 < \mathcal{A} < 5$.

Partie B: Étude Analytique

1. Dressons le tableau de variation:

Étape 1: $f'(x) = (-10x + 15)e^{-x}$, sur $[0;6]$.

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout x de $[0;6]$, sachant que: $e^{-x} > 0$.

• 1er cas: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $(-10x + 15)e^{-x} = 0$

<=> $-10x + 15 = 0$, cad: $x = \frac{3}{2}$.

• 2eme cas: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $(-10x + 15)e^{-x} < 0$

<=> $-10x + 15 < 0$, cad: $x > \frac{3}{2}$ ou $x \in]\frac{3}{2};6]$.

• **3^eme cas**: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $(-10x + 15)e^{-x} > 0$

$\iff -10x + 15 > 0$, cad: $x < \frac{3}{2}$ ou $x \in [0;\frac{3}{2}[$.

Au total: • f est croissante sur $[0;\frac{3}{2}]$,

(car sur $[0;\frac{3}{2}]$, $f'(x) \geqslant 0$)

• f est décroissante sur $[\frac{3}{2};6]$.

(car sur $[\frac{3}{2};6]$, $f'(x) \leqslant 0$)

Étape 2: Le tableau de variation.

Nous pouvons dresser le tableau de variation suivant:

x	0		$\frac{3}{2}$		6
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = -5$,

• $b = f\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow b = 10e^{-3/2} > 0$,

• $c = f(6) \Rightarrow c = 55e^{-6} > 0$.

Étape 3: La valeur de l'extremum.

Soit $E(x_E\,;y_E)$, l'extremum de f sur $[0;6]$.

x_E est tel que: $f'(x_E) = 0$.

$f'(x_E) = 0 \Rightarrow x_E = \frac{3}{2}$ et donc $y_E = 10e^{-3/2}$.

Au total: le point $E\left(\frac{3}{2}; 10e^{-3/2}\right)$ est l'extremum de f sur $[0;6]$.

2. Étudions la convexité de f sur $[0;6]$:

Ici: • $f'(x) = (-10x + 15)e^{-x}$

• $f''(x) = (10x - 25)e^{-x}$.

Or: • f est convexe sur $[0;6]$ ssi: pour tout $x \in [0;6]$, $f''(x) \geqslant 0$.

• f est concave sur $[0;6]$ ssi: pour tout $x \in [0;6]$, $f''(x) \leqslant 0$.

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [0;6]$, sachant que: $e^{-x} > 0$.

• **1er cas**: $f''(x) \geqslant 0$.

$f''(x) \geqslant 0$ ssi $(10x - 25)e^{-x} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow$ $10x - 25 \geqslant 0$, cad: $x \geqslant \frac{5}{2}$ ou $x \in [\frac{5}{2};6]$.

• **2eme cas**: $f''(x) \leqslant 0$.

$f''(x) \leqslant 0$ ssi $(10x - 25)e^{-x} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow$ $10x - 25 \leqslant 0$, cad: $x \leqslant \frac{5}{2}$ ou $x \in [0;\frac{5}{2}]$.

Au total: • f est concave sur $[0;\frac{5}{2}]$,

• f est convexe sur $[\frac{5}{2};6]$.

3. Montrons que F est une primitive de f sur $[0;6]$:

$F(x) = (-10x - 5)e^{-x}$.

Ici: f est continue sur $[0;6]$. Elle admet donc une primitive F dérivable sur l'intervalle $[0;6]$ et F est telle que: $F' = f$.

Pour tout $x \in [0;6]$, $F'(x) = -10e^{-x} - (-10x - 5)e^{-x}$

$$\Rightarrow \quad F'(x) = (10x - 5)e^{-x}.$$

Au total, on a bien pour tout $x \in [0;6]$: F est une primitive de f car $F' = f$.

4. Déduisons-en la valeur exacte puis une valeur approchée au centième de $I = \int_2^4 f(x)dx$:

Ici, il s'agit de calculer: $I = \int_2^4 f(x)dx$.

f est continue sur $[0;6]$, elle admet donc des primitives sur $[0;6]$ et par conséquent: I existe.

$$I = \int_2^4 (10x - 5)e^{-x}dx$$

$$= [(-10x - 5)e^{-x}]_2^4$$

$$\Rightarrow \quad I = 25e^{-2} - 45e^{-4}.$$

En arrondissant au centième, nous obtenons: $I \approx 2,56$.

Au total, l'aire exacte demandée est: $I = 25e^{-2} - 45e^{-4}$ ou $I \approx 2,56$.

5. Déterminons, à 0,01 près, la hauteur AD de ce rectangle:

La hauteur AD de ce rectangle correspond à la valeur moyenne de la fonction f sur $[2;4]$.

Soit " m ", la valeur moyenne de f sur $[2;4]$.

m est telle que: $m = \frac{1}{4-2}\int_2^4 f(x)dx.$

$m = \frac{1}{4-2}\int_2^4 f(x)dx$ <=> $m = \frac{1}{2} \times 1$

=> $m \approx 1,28.$

Au total, à 0, 01 près, la hauteur AD de ce rectangle est: $m \approx 1,28.$