Corrigé
Exercice 4

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série ES

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 7 (ES)**

ES : ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

- *Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.*
- *Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*
- *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
- *Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

EXERCICE 4 (5 points) Commun à tous les candidats

Les deux parties sont indépendantes.

Une machine permet le conditionnement d'un jus de fruit dans des bouteilles.

La quantité de jus injecté dans une bouteille par la machine, exprimée en ml (millilitre), est modélisée avec une variable aléatoire réelle X.
On admet que celle-ci suit une loi normale de moyenne $\mu = 500$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

Partie A

On prélève une bouteille au hasard en fin de chaîne de remplissage.

1. Déterminer $P(X \leqslant 496)$. Donner le résultat arrondi à 10^{-2} près.
2. Déterminer la probabilité que la bouteille ait un contenu compris entre 497 et 500 millilitres. Donner le résultat arrondi à 10^{-2} près.
3. Comment choisir la valeur de α afin que $P(500-\alpha \leqslant X \leqslant 500+\alpha)$ soit approximativement égal à 0,95 à 10^{-2} près.

Partie B

Une association de consommateurs a testé un lot de 200 bouteilles issues de cette chaine de production. Il a été constaté que 15 bouteilles contiennent moins de 500 ml de jus de fruit contrairement à ce qui est annoncé sur l'étiquetage.

L'entreprise qui assure le conditionnement de ce jus de fruit affirme que 97 % des bouteilles produites contiennent au moins 500 millitres de jus de fruit.

Le test réalisé par l'association remet-il en cause l'affirmation de l'entreprise ?

EXERCICE 4

[Antilles-Guyane 2015]

Partie A: Le contenu d'une bouteille

1. Déterminons $P(X \leqslant 496)$:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X est la variable aléatoire qui correspond à la quantité de jus injecté dans une bouteille (en ml).
- X suit la loi normale d'espérance $\mu = 500$ et d'écart type $\sigma = 2$.
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de calculer: $P(X \leqslant 496)$.

$$P(X \leqslant 496) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leqslant \frac{496 - 500}{2}\right)$$

$$= P(T \leqslant -2)$$

$$= 1 - P(T \leqslant 2).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(X \leqslant 496) \approx 2\%.$$

Au total, la probabilité demandée est de: 2%.

2. Déterminons $P(497 \leqslant X \leqslant 500)$:

Il s'agit de calculer: $P(497 \leqslant X \leqslant 500)$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(497 \leqslant X \leqslant 500) \approx 43\%.$$

Au total, la probabilité demandée est de: 43%.

3. Déterminons α tel que $P(500 - \alpha \leqslant X \leqslant 500 + \alpha) = 0,95$:

Nous savons que: $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$.

Ici, nous avons: $P(500 - 2\sigma \leqslant X \leqslant 500 + 2\sigma) \approx 0,954$.

Par identification, nous avons: $\alpha = 2\sigma$ => $\alpha = 4$.

Au total, la valeur recherchée de α est: $\alpha = 4$.

Partie B: Mauvais étiquettage

Le test de l'association remet-il en cause l'affirmation de l'entreprise ?

Ici, nous avons:
- $n = 200$
- $p = 97\%$
- $f = \dfrac{185}{200}$ => $f = 92,5\%$.

$(185 = 200 - 15)$

Dans ces conditions:

$n = 200 \geqslant 30$, $n \cdot p = 194 \geqslant 5$ et $n \cdot (1 - p) = 6 \geqslant 5$.

Les conditions sont donc réunies.

On choisit un échantillon aléatoire de 200 bouteilles.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [\, 94,6\% \,;\, 99,4\% \,]$.

Or, la fréquence de bouteilles " f " contenant au moins 500 ml de jus de fruit, sur l'échantillon, est telle que:

$$f \approx 92,5\ \% \notin I.$$

Ainsi, le test réalisé par l'association remet en cause l'affirmation de l'entreprise.