

Corrigé

Exercice 3



freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série ES

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7 (ES)

ES : ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

**Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées
conformément à la réglementation en vigueur.**

- *Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.*
- *Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*
- *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
- *Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

EXERCICE 3 (5 points) Commun à tous les candidats

En 2010, un opérateur de téléphonie mobile avait un million de clients. Depuis, chaque année, l'opérateur perd 10% de ses clients, mais regagne dans le même temps 60 000 nouveaux clients.

1. a) On donne l'algorithme ci-dessous. Expliquer ce que l'on obtient avec cet algorithme.

Variabes : k, NbClients
Traitement : Affecter à k la valeur 0
Affecter à NbClients la valeur 1 000 000
Tant que k < 8
 affecter à k la valeur k+1
 affecter à NbClients la valeur $0,9 \times \text{NbClients} + 60\,000$
 Afficher NbClients
Fin Tant que

- b) Recopier et compléter le tableau ci-dessous avec toutes les valeurs affichées pour k de 0 jusqu'à 5.

k	0	1	2	3	4	5
NbClients						

2. En supposant que cette évolution se poursuit de la même façon, la situation peut être modélisée par la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n , par :

$$\begin{cases} U_0 = 1000 \\ U_{n+1} = 0,9 U_n + 60. \end{cases}$$

Le terme U_n donne une estimation du nombre de clients, en millier, pour l'année $2010+n$. Pour étudier la suite (U_n) , on considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 600$.

- a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison 0,9.
b) Déterminer l'expression de V_n en fonction de n .
c) Montrer que pour tout entier naturel n , on a $U_n = 400 \times 0,9^n + 600$.
d) Montrer que la suite (U_n) est décroissante. Interpréter le résultat dans le contexte de ce problème.
3. À la suite d'une campagne publicitaire conduite en 2013, l'opérateur de téléphonie observe une modification du comportement de ses clients.

Chaque année à compter de l'année 2014, l'opérateur ne perd plus que 8% de ses clients et regagne 100 000 nouveaux clients.

On admet que le nombre de clients comptabilisés en 2014 était égal à 860 000.

En supposant que cette nouvelle évolution se poursuive durant quelques années, déterminer le nombre d'années nécessaire pour que l'opérateur retrouve au moins un million de clients.

EXERCICE 3

[Antilles-Guyane 2015]

1. a. Expliquons ce qu'on obtient avec cet algorithme:

Cet algorithme permet le calcul du nombre de clients de l'opérateur de téléphonie pendant 8 ans à compter de 2010.

Il nous donne ainsi le nombre de clients de 2011 à 2018.

1. b. Complétons le tableau:

" Chaque année, l'opérateur perd 10% de ses clients, mais regagne dans le même temps 60 000 nouveaux clients ".

D'où le tableau suivant:

K	0	1	2	3	4	5
nombre de clients	1 000 000	960 000	924 000	891 600	862 440	836 196

2. a. Montrons que (V_n) est géométrique et déterminons q et V_0 :

$$\begin{aligned} V_n = U_n - 600 &\Leftrightarrow V_{n+1} = U_{n+1} - 600 \\ &\Leftrightarrow V_{n+1} = (0,9 U_n + 60) - 600 \quad (1). \end{aligned}$$

$$\text{Or: } V_0 = U_0 - 600 \Rightarrow V_0 = 400 \text{ et } U_n = V_n + 600.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } (1) &\Leftrightarrow V_{n+1} = (0,9 [V_n + 600] + 60) - 600 \\ &\Rightarrow V_{n+1} = 0,9 V_n \end{aligned}$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $V_0 = 400$.

2. b. Déterminons V_n en fonction de n :

Comme $V_{n+1} = 0,9 V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 \times (0,9)^n, \text{ avec: } V_0 = 400.$$

2. c. Montrons que pour tout entier naturel n , $U_n = 400 \times (0,9)^n + 600$:

Nous savons que: * $V_n = 400 \times (0,9)^n$

$$* U_n = V_n + 600.$$

D'où: $U_n = 400 \times (0,9)^n + 600$.

2. d. Montrons que (U_n) est décroissante et interprétons:

Pour cela, nous devons déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$, et ce, pour tout entier naturel n .

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= (400 \times (0,9)^{n+1} + 600) - (400 \times (0,9)^n + 600) \\ &= 400 \times (0,9)^n [0,9 - 1] \\ &= -0,1 \times (400 \times (0,9)^n) \\ &= -40 \times (0,9)^n. \end{aligned}$$

Donc pour tout entier naturel n : $U_{n+1} - U_n < 0$.

Au total: la suite (U_n) est strictement décroissante.

Nous pouvons interpréter ce résultat par le fait que le nombre de clients de l'opérateur de téléphonie diminue d'année en année.

3. Déterminons le nombre d'années " n " nécessaire pour que l'opérateur retrouve au moins un million de clients:

" Chaque année à compter de 2014, l'opérateur ne perd plus que 8% de ses clients et regagne 100000 nouveaux clients ".

Donc l'année $(2014 + (n + 1))$, il y aura: $\theta_{n+1} = 0,92 \times \theta_n + 100\,000$,
 θ_n étant le nombre de clients l'année $(2014 + (n))$.

Or le nombre de clients comptabilisés en 2014 est de: 860 000.

D'où: $\theta_0 = 860\,000$.

Ainsi: • $\theta_0 = 860\,000$

$$\bullet \theta_1 = 0,92 \times \theta_0 + 100\,000 \Rightarrow \theta_1 = 891\,200$$

$$\bullet \theta_2 = 0,92 \times \theta_1 + 100\,000 \Rightarrow \theta_2 = 919\,900$$

$$\bullet \theta_3 = 0,92 \times \theta_2 + 100\,000 \Rightarrow \theta_3 = 946\,311$$

$$\bullet \theta_4 = 0,92 \times \theta_3 + 100\,000 \Rightarrow \theta_4 = 970\,607$$

$$\bullet \theta_5 = 0,92 \times \theta_4 + 100\,000 \Rightarrow \theta_5 = 992\,958$$

$$\bullet \theta_6 = 0,92 \times \theta_5 + 100\,000 \Rightarrow \theta_6 = 1\,013\,522.$$

Ainsi: $\theta_6 > 1\,000\,000$ clients.

Au total, en 2020 $(2014 + 6)$, l'opérateur retrouvera au moins un million de clients.