

EXERCICE 4

[Antilles-Guyane 2015]

Partie A: Le contenu d'une bouteille

1. Déterminons $P(X \leq 496)$:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X est la variable aléatoire qui correspond à la quantité de jus injecté dans une bouteille (en ml).
- X suit la loi normale d'espérance $\mu = 500$ et d'écart type $\sigma = 2$.
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de calculer: $P(X \leq 496)$.

$$\begin{aligned}P(X \leq 496) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{496 - 500}{2}\right) \\ &= P(T \leq -2) \\ &= 1 - P(T \leq 2).\end{aligned}$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(X \leq 496) \approx 2\%.$$

Au total, la probabilité demandée est de: 2%.

2. Déterminons $P(497 \leq X \leq 500)$:

Il s'agit de calculer: $P(497 \leq X \leq 500)$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(497 \leq X \leq 500) \approx 43\%.$$

Au total, la probabilité demandée est de: 43%.

3. Déterminons α tel que $P(500 - \alpha \leq X \leq 500 + \alpha) = 0,95$:

Nous savons que: $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$.

Ici, nous avons: $P(500 - 2\sigma \leq X \leq 500 + 2\sigma) \approx 0,954$.

Par identification, nous avons: $\alpha = 2\sigma \Rightarrow \alpha = 4$.

Au total, la valeur recherchée de α est: $\alpha = 4$.

Partie B: Mauvais étiquetage

Le test de l'association remet-il en cause l'affirmation de l'entreprise ?

Ici, nous avons: • $n = 200$

• $p = 97\%$

• $f = \frac{185}{200} \Rightarrow f = 92,5\%$.

$$(185 = 200 - 15)$$

Dans ces conditions:

$$n = 200 \geq 30, n \cdot p = 194 \geq 5 \text{ et } n \cdot (1 - p) = 6 \geq 5.$$

Les conditions sont donc réunies.

On choisit un échantillon aléatoire de 200 bouteilles.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [94,6\%; 99,4\%]$.

Or, la fréquence de bouteilles " f " contenant au moins 500 ml de jus de fruit, sur l'échantillon, est telle que:

$$f \approx 92,5\% \notin I.$$

Ainsi, le test réalisé par l'association remet en cause l'affirmation de l'entreprise.