EXERCICE 3

[Antilles-Guyane 2015]

1. a. Expliquons ce qu'on obtient avec cet algorithme:

Cet algorithme permet le calcul du nombre de clients de l'opérateur de téléphonie pendant 8 ans à compter de 2010.

Il nous donne ainsi le nombre de clients de 2011 à 2018.

1. b. Complétons le tableau:

" Chaque année, l'opérateur perd 10% de ses clients, mais regagne dans le même temps 60 000 nouveaux clients ".

D'où le tableau suivant:

K	0	1	2	3	4	5
nombre de clients	1 000 000	960 000	924 000	891 600	862 440	836 196

2. a. Montrons que (V_n) est géométrique et déterminons q et V_0:

$$V_n = U_n - 600 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 600$$

$$\iff V_{n+1} = (0,9\ U_n + 60) - 600 \quad (1).$$

Or: $V_0 = U_0 - 600 \Rightarrow V_0 = 400$ et $U_n = V_n + 600$.

Ainsi: $(1) \iff V_{n+1} = (0,9\,[V_n + 600] + 60) - 600$

$$\Rightarrow V_{n+1} = 0,9\ V_n.$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $V_0 = 400$.

2. b. Déterminons V_n en fonction de n:

Comme $V_{n+1} = 0,9\ V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 \times (0,9)^n, \quad \text{avec:} \quad V_0 = 400.$$

2. c. Montrons que pour tout entier naturel n, $U_n = 400 \times (0,9)^n + 600$:

Nous savons que: * $V_n = 400 \times (0,9)^n$

* $U_n = V_n + 600.$

D'où: $U_n = 400 \times (0,9)^n + 600.$

2. d. Montrons que (U_n) est décroissante et interprétons:

Pour cela, nous devons déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$, et ce, pour tout entier naturel n.

$$U_{n+1} - U_n = (400 \times (0,9)^{n+1} + 600) - (400 \times (0,9)^n + 600)$$
$$= 400 \times (0,9)^n\ [0,9 - 1]$$
$$= -0,1 \times (400 \times (0,9)^n)$$
$$= -40 \times (0,9)^n.$$

Donc pour tout entier naturel n: $U_{n+1} - U_n < 0.$

Au total: la suite (U_n) est strictement décroissante.

Nous pouvons interpréter ce résultat par le fait que le nombre de clients de l'opérateur de téléphonie diminue d'année en année.

3. Déterminons le nombre d'années " n " nécessaire pour que l'opérateur retrouve au moins un million de clients:

" Chaque année à compter de 2014, l'opérateur ne perd plus que 8% de ses clients et regagne 100000 nouveaux clients ".

Donc l'année (2014 + (n + 1)), il y aura: $\theta_{n+1} = 0,92 \times \theta_n + 100000$,

θ_n étant le nombre de clients l'année (2014 + (n)).

Or le nombre de clients comptabilisés en 2014 est de: 860000.

D'où: $\theta_0 = 860000$.

Ainsi:
- $\theta_0 = 860000$
- $\theta_1 = 0,92 \times \theta_0 + 100000 \Rightarrow \theta_1 = 891200$
- $\theta_2 = 0,92 \times \theta_1 + 100000 \Rightarrow \theta_2 = 919900$
- $\theta_3 = 0,92 \times \theta_2 + 100000 \Rightarrow \theta_3 = 946311$
- $\theta_4 = 0,92 \times \theta_3 + 100000 \Rightarrow \theta_4 = 970607$
- $\theta_5 = 0,92 \times \theta_4 + 100000 \Rightarrow \theta_5 = 992958$
- $\theta_6 = 0,92 \times \theta_5 + 100000 \Rightarrow \theta_6 = 1013522$.

Ainsi: $\theta_6 > 1000000$ clients.

Au total, en 2020 (2014 + 6), l'opérateur retrouvera au moins un million de clients.