Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série ES/L

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 5 (ES), 4 (L)**

ES : ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE
L : ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

- *Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.*
- *Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*
- *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
- *Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

EXERCICE 3 (5 points) Commun à tous les candidats

En 2010, un opérateur de téléphonie mobile avait un million de clients. Depuis, chaque année, l'opérateur perd 10% de ses clients, mais regagne dans le même temps 60 000 nouveaux clients.

1. a) On donne l'algorithme ci-dessous. Expliquer ce que l'on obtient avec cet algorithme.

```
Variables :      k, NbClients
Traitement :     Affecter à k la valeur 0
                 Affecter à NbClients la valeur 1 000 000
                 Tant que k < 8
                   | affecter à k la valeur k+1
                   | affecter à NbClients la valeur 0,9×NbClients+60 000
                   | Afficher NbClients
                 Fin Tant que
```

b) Recopier et compléter le tableau ci-dessous avec toutes les valeurs affichées pour k de 0 jusqu'à 5.

k	0	1	2	3	4	5
NbClients						

2. En supposant que cette évolution se poursuit de la même façon, la situation peut être modélisée par la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} U_0 = 1000 \\ U_{n+1} = 0,9\, U_n + 60. \end{cases}$$

Le terme U_n donne une estimation du nombre de clients, en millier, pour l'année $2010+n$. Pour étudier la suite (U_n), on considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 600$.

a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison 0,9.

b) Déterminer l'expression de V_n en fonction de n.

c) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $U_n = 400 \times 0,9^n + 600$.

d) Montrer que la suite (U_n) est décroissante. Interpréter le résultat dans le contexte de ce problème.

3. À la suite d'une campagne publicitaire conduite en 2013, l'opérateur de téléphonie observe une modification du comportement de ses clients.

Chaque année à compter de l'année 2014, l'opérateur ne perd plus que 8 % de ses clients et regagne 100 000 nouveaux clients.

On admet que le nombre de clients comptabilisés en 2014 était égal à 860 000.

En supposant que cette nouvelle évolution se poursuive durant quelques années, déterminer le nombre d'années nécessaire pour que l'opérateur retrouve au moins un million de clients.

EXERCICE 3

[Antilles-Guyane 2015]

1. a. Expliquons ce qu'on obtient avec cet algorithme:

Cet algorithme permet le calcul du nombre de clients de l'opérateur de téléphonie pendant 8 ans à compter de 2010.

Il nous donne ainsi le nombre de clients de 2011 à 2018.

1. b. Complétons le tableau:

" Chaque année, l'opérateur perd 10% de ses clients, mais regagne dans le même temps 60 000 nouveaux clients ".

D'où le tableau suivant:

K	0	1	2	3	4	5
nombre de clients	1 000 000	960 000	924 000	891 600	862 440	836 196

2. a. Montrons que (V_n) est géométrique et déterminons q et V_0:

$V_n = U_n - 600 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 600$

$\iff V_{n+1} = (0,9\ U_n + 60) - 600 \quad (1).$

Or: $V_0 = U_0 - 600 \Rightarrow V_0 = 400$ et $U_n = V_n + 600$.

Ainsi: $(1) \iff V_{n+1} = (0,9\,[V_n + 600] + 60) - 600$

$\Rightarrow V_{n+1} = 0,9\ V_n$.

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $V_0 = 400$.

2. b. Déterminons V_n en fonction de n:

Comme $V_{n+1} = 0,9\ V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 \times (0,9)^n, \quad \text{avec:} \quad V_0 = 400.$$

2. c. Montrons que pour tout entier naturel n, $U_n = 400 \times (0,9)^n + 600$:

Nous savons que: * $V_n = 400 \times (0,9)^n$

* $U_n = V_n + 600$.

D'où: $U_n = 400 \times (0,9)^n + 600$.

2. d. Montrons que (U_n) est décroissante et interprétons:

Pour cela, nous devons déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$, et ce, pour tout entier naturel n.

$$U_{n+1} - U_n = (400 \times (0,9)^{n+1} + 600) - (400 \times (0,9)^n + 600)$$

$$= 400 \times (0,9)^n\,[0,9 - 1]$$

$$= -0,1 \times (400 \times (0,9)^n)$$

$$= -40 \times (0,9)^n.$$

Donc pour tout entier naturel n: $U_{n+1} - U_n < 0$.

Au total: la suite (U_n) est strictement décroissante.

Nous pouvons interpréter ce résultat par le fait que le nombre de clients de l'opérateur de téléphonie diminue d'année en année.

3. Déterminons le nombre d'années " n " nécessaire pour que l'opérateur retrouve au moins un million de clients:

" Chaque année à compter de 2014, l'opérateur ne perd plus que 8% de ses clients et regagne 100000 nouveaux clients ".

Donc l'année (2014 + (n + 1)), il y aura: $\theta_{n+1} = 0,92 \times \theta_n + 100000$,

θ_n étant le nombre de clients l'année (2014 + (n)).

Or le nombre de clients comptabilisés en 2014 est de: 860000.

D'où: $\theta_0 = 860000$.

Ainsi:
- $\theta_0 = 860000$
- $\theta_1 = 0,92 \times \theta_0 + 100000 \Rightarrow \theta_1 = 891200$
- $\theta_2 = 0,92 \times \theta_1 + 100000 \Rightarrow \theta_2 = 919900$
- $\theta_3 = 0,92 \times \theta_2 + 100000 \Rightarrow \theta_3 = 946311$
- $\theta_4 = 0,92 \times \theta_3 + 100000 \Rightarrow \theta_4 = 970607$
- $\theta_5 = 0,92 \times \theta_4 + 100000 \Rightarrow \theta_5 = 992958$
- $\theta_6 = 0,92 \times \theta_5 + 100000 \Rightarrow \theta_6 = 1013522$.

Ainsi: $\theta_6 > 1000000$ clients.

Au total, en 2020 (2014 + 6), l'opérateur retrouvera au moins un million de clients.