

# Corrigé

## Exercice 4



---

---

freemaths.fr

---

---

# LES MATHÉMATIQUES

## AU BACCALAURÉAT ES

### FONCTIONS ET INTÉGRALES, BAC ES

- Fonctions
- Domaine de définition
- Dérivées:  $f'$  et  $f''$
- Sens de variation d'une fonction
- Fonction croissante, fonction décroissante
- Tableau des variations d'une fonction
- Fonction concave, fonction convexe
- Point d'inflexion
- Équation d'une tangente
- Primitives
- Intégrales
- Valeur moyenne
- Calcul d'une aire
- Corollaire des valeurs intermédiaires (TVI)

## EXERCICE 4

[ Amérique du Nord 2019 ]

### Partie A: Lectures graphiques

1. Lisons graphiquement les valeurs de  $f(0)$ ,  $f'(0)$  et  $f'(11)$ :

D'après l'énoncé: •  $f$  est définie et dérivable sur  $[0; 30]$ ,

•  $A(0; -11)$ ,

•  $B(5; 0)$ ,

•  $C(11; 12)$ .

Dans ces conditions:

a.  $f(0) = -11$ . (ordonnée du point A)

b.  $f'(11) = 0$ , car la tangente au point  $C(11; 12)$  est parallèle à l'axe des abscisses. Et donc son coefficient directeur est nul.

c.  $f'(0)$  ?

Nous savons que la tangente à la courbe  $C_f$ , au point  $x = 0$ , passe par les points:  $A(0; -11)$  et  $B(5; 0)$ .

Soit  $y = ax + b$ , l'équation de cette tangente.

"  $a = f'(0)$  " est le coefficient directeur et est tel que:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Leftrightarrow a = \frac{0 - (-11)}{5 - 0} \text{ cad: } a = f'(0) = \frac{11}{5}.$$

Au total:  $f(0) = -11$ ,  $f'(11) = 0$  et  $f'(0) = \frac{11}{5}$ .

2. L'affirmation est-elle vraie ou fausse ? Justifions:

Ici,  $F$  correspond à une primitive de  $f$  sur  $[0; 30]$ .

Donc pour tout  $x \in [0; 30]$ :  $F'(x) = f(x)$ .

Sur  $[0; 11]$ , le signe de  $f$  est tantôt négatif, tantôt positif.

Donc sur  $[0; 11]$ , la fonction  $F$  est d'abord décroissante puis est croissante.

Ainsi: L'affirmation est fausse.

## Partie B: Étude d'une fonction

1. Justifions le résultat de la ligne 2 du logiciel:

Ici: •  $f(x) = (x^2 - 11) e^{-0,2x}$  ( $u \times e^v$ )

•  $Df = [0; 30]$ .

D'après l'énoncé,  $f$  est dérivable sur  $[0; 30]$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $f'$  pour tout  $x \in [0; 30]$ .

Pour tout  $x \in [0; 30]$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x) \times (e^{-0,2x}) + (x^2 - 11) \times (-0,2 e^{-0,2x}) && (u' \times e^v + u \times v' \times e^v) \\ &= (-0,2x^2 + 2x + 2,2) \times e^{-0,2x}. \end{aligned}$$

Au total, pour tout  $x \in [0; 30]$ :  $f'(x) = (-0,2x^2 + 2x + 2,2) \times e^{-0,2x}$ .

2. Etudions le signe de  $f'$  sur  $[0; 30]$  puis dressons le tableau des variations:

Préalablement, résolvons l'équation:  $-0,2x^2 + 2x + 2,2 = 0$  (1).

$$\Delta = 4 - 4 \times (-0,2) \times 2,2 \text{ cad: } \Delta = 5,76 = (2,4)^2 > 0.$$

Comme  $\Delta > 0$ , l'équation (1) admet 2 solutions:

$$\bullet x_1 = \frac{-2 - 2,4}{-0,4} \text{ cad: } x_1 = 11,$$

$$\bullet x_2 = \frac{-2 + 2,4}{-0,4} \text{ cad: } x_2 = -1.$$

Nous allons distinguer 2 cas pour tout  $x \in [0; 30]$ :

• 1<sup>er</sup> cas:  $f'(x) \leq 0$ .

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } -0,2x^2 + 2x + 2,2 \leq 0 \text{ cad ssi: } x \geq 11 \text{ ou } x \in [11; +\infty[.$$

( car pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^{-0,2x} > 0$  )

• 2<sup>ème</sup> cas:  $f'(x) \geq 0$ .

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } -0,2x^2 + 2x + 2,2 \geq 0 \text{ cad ssi: } x \leq 11 \text{ ou } x \in [0; 11].$$

( car pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^{-0,2x} > 0$  )

Au total: •  $f$  est croissante sur  $[0; 11]$ ,

•  $f$  est décroissante sur  $[11; +\infty[$ .

Nous pouvons donc dresser le tableau des variations suivant:

$x$	0	11	30		
$f'$		+	0	-	
$f$			$a$	$b$	$c$

- Avec:
- $a = f(0) = -11$ ,
  - $b = f(11) = 110 e^{-2,2}$ ,
  - $c = f(30) = 889 e^{-6}$ .

3. a. Montrons que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[0; 11]$ :

$$\text{Sur } [0; 11], f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 11) e^{-0,2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 11 = 0, \text{ car: pour tout } x \in \mathbb{R}, e^{-0,2x} > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 11$$

$$\Leftrightarrow \alpha = x = \sqrt{11}, \text{ car: } x \in [0; 11].$$

Au total, l'équation  $f(x) = 0$  admet bien une unique solution  $\alpha$  sur  $[0; 11]$ :  $\alpha = \sqrt{11}$ .

3. b. Donnons une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près:

Une valeur approchée de  $\alpha = \sqrt{11}$ , à  $10^{-2}$  près est:  $\alpha \approx 3,32$ .

4. Calculons la valeur exacte puis l'arrondi à  $10^{-2}$  de  $I$ :

$$\text{Ici: } I = \int_{10}^{20} f(x) dx.$$

Or d'après le logiciel:  $F(x) = (-5x^2 - 50x - 195) e^{-0,2x}$ .

( $F$  étant l'intégrale de  $f$ )

$$\begin{aligned}
 \text{D'où: } I &= [F(x)]_{10}^{20} \\
 &= [(-5x^2 - 50x - 195) e^{-0,2x}]_{10}^{20} \\
 &= -3195 e^{-4} + 1195 e^{-2} \\
 &\approx 103,21.
 \end{aligned}$$

- Ainsi:**
- la valeur exacte de  $I$  est  $-3195 e^{-4} + 1195 e^{-2}$ ,
  - l'arrondi à  $10^{-2}$  de  $I$  est  $103,21$ .

### Partie C: Application économique

1. Calculons le nombre d'objets demandés lorsque le prix unitaire est de 15 €:

- D'après l'énoncé:
- $f(x)$  = la quantité demandée d'objets ( $\times 100\,000$ ),
  - $x$  = le prix unitaire en euros.

Donc si le prix unitaire est  $x = 15$  euros, la quantité demandée d'objets sera de:  $f(15) = ((15)^2 - 11) e^{-3}$

**cad:**  $f(15) = 214 \times e^{-3}$

**ou:**  $f(15) \approx 10,65 \times 100\,000$  unités.

**Ainsi, la quantité totale demandée d'objets au prix unitaire de 15 € est d'environ: 1065000 unités.**

2. Déterminons la demande moyenne d'objets lorsque le prix unitaire varie entre 10 et 20 euros:

Pour répondre à cette question, nous allons calculer la valeur moyenne "  $m$  " de  $f$  sur l'intervalle  $[10; 20]$ .

D'après le cours, "m" est telle que: 
$$m = \frac{1}{20 - 10} \int_{10}^{20} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{10} \times I.$$

Or:  $I \approx 103,21.$

D'où:  $m \approx \frac{103,21}{10}$

$\approx 10,32 \times 100\,000$  unités.

Au total, la demande moyenne d'objets avec un prix unitaire qui varie entre 10 et 20 euros est d'environ: 1032 000 unités.

### 3. Calculons $E(15)$ et interprétons le résultat:

D'après l'énoncé:  $E(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \times x$ , avec  $x \in [5; 30]$ .

Dans ces conditions, si  $x = 15$ : 
$$E(15) = \left[ \frac{(-0,2 \times (15)^2 + 2 \times (15) + 2,2) e^{-3}}{((15)^2 - 11) \times e^{-3}} \right] \times 15$$

$$= \left[ \frac{-12,8}{214} \right] \times 15$$

$$\approx -0,90.$$

Au total, l'élasticité demandée est d'environ: -0,90.

Cela signifie que si le prix diminue de 1%, alors la demande d'objets augmentera de 0,9% (-1%  $\times$  -0,9).

On dit alors que le bien est **typique**, sa demande étant une fonction décroissante de son prix.