Corrigé
Exercice 1

freemaths.fr

LES MATHÉMATIQUES

AU BACCALAURÉAT ES

PROBABILITÉS, BAC ES

(probas discrètes et probas à densité)

- Arbre de probabilités
- Arbre pondéré
- Probabilités conditionnelles
- Loi de Bernoulli
- Loi binomiale
- Espérance mathématique
- Loi uniforme
- Loi normale centrée réduite
- Loi normale
- Intervalle de confiance
- Intervalle de fluctuation asymptotique
- Longueur d'un intervalle

EXERCICE 1

[Amérique du Nord 2019]

Partie A:

1. Recopions et complétons l'arbre de probabilités:

D'après l'énoncé, nous avons:

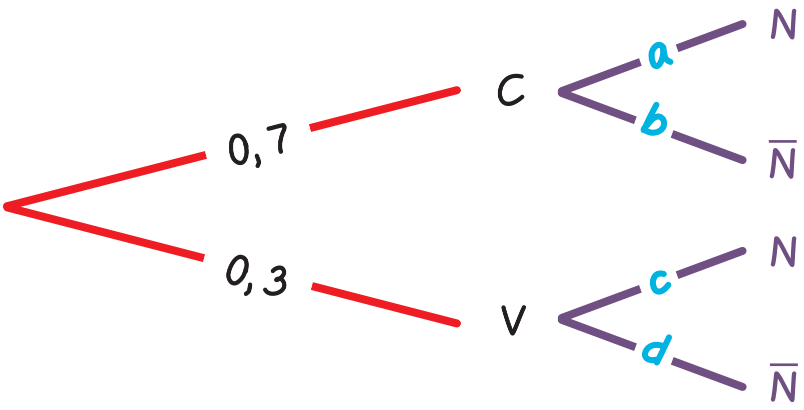
- C = " Fabien commence par une séance de course à pied ".
- V = " Fabien commence par une séance de vélo ".
- N = " Fabien enchaîne par une séance de natation ".

- $P(C) = 1 - P(V) = 1 - 0,3 = 0,7$
- $P(V) = 0,3$.

- $P_C(N) = 0,4$
- $P_C(\overline{N}) = 1 - 0,4 = 0,6$.

- $P_V(N) = 0,8$
- $P_V(\overline{N}) = 1 - 0,8 = 0,2$.

D'où l'arbre de probabilités suivant:



, avec :
- $a = 0,4$
- $b = 0,6$
- $c = 0,8$
- $d = 0,2$

2. Calculons la probabilité que Fabien commence par une séance de course à pied et enchaîne par une séance de natation:

Nous devons calculer ici: $P(C \cap N)$.

$P(C \cap N) = P_C(N) \times P(C)$.

Ainsi: $P(C \cap N) = 0,4 \times 0,7$ **cad**: $P(C \cap N) = 0,28$.

Au total, la probabilité que Fabien commence par une séance de course à pied et enchaîne par une séance de natation est de: 28%.

3. Démontrons que $P(N) = 0,52$:

Calculons donc: $P(N)$.

L'événement $N = (N \cap C) \cup (N \cap V)$.

D'où: $P(N) = P(N \cap C) + P(N \cap V)$

$= P_C(N) \times P(C) + P_V(N) \times P(V)$.

Ainsi: $P(N) = 0,4 \times 0,7 + 0,8 \times 0,3$ **cad**: $P(N) = 0,52$.

Au total, nous avons bien: $P(N) = 0,52$.

4. **Déterminons la probabilité que Fabien ait commencé par une séance de vélo sachant qu'il n'a pas fait de séance de natation:**

Nous devons calculer: $P_{\overline{N}}(V)$.

$$P_{\overline{N}}(V) = \frac{P(\overline{N} \cap V)}{P(\overline{N})}$$

$$= \frac{P_V(\overline{N}) \times P(V)}{1 - P(N)}.$$

Ainsi: $P_{\overline{N}}(V) = \dfrac{0,2 \times 0,3}{1 - 0,52}$ cad: $P_{\overline{N}}(V) = 0,125$.

Au total, la probabilité demandée est de: $12,5\%$.

Partie B:

1. **Calculons $P(T \geqslant 3)$ et interprétons:**

D'après l'énoncé, nous savons que:

- T suit une loi normale d'espérance $\mu = 2,5$ heures et d'écart type $\sigma = 0,25$ heure.
- Y suit la loi normale centrée réduite.

$$P(T \geqslant 3) = P\left(\frac{T - \mu}{\sigma} \geqslant \frac{3 - 2,5}{0,25}\right)$$

$$= P(Y \geqslant 2)$$

$$= 1 - P(Y \leqslant 2).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(T \geqslant 3) \approx 1 - 0,977 \text{ cad: } P(T \geqslant 3) \approx 2,3\%.$$

Au total: $P(T \geqslant 3) \approx 2,3\%$.

Cela signifie qu'environ 2, 3% des participants ont une performance supérieure ou égale à 3 heures (pour effectuer les trois épreuves du parcours).

2. Calculons la probabilité qu'une performance prise au hasard se situe entre 2 heures et 3 heures:

Il s'agit de calculer: $P(2 \leqslant T \leqslant 3)$.

Nous remarquons que: $2 = \mu - 2\sigma$ et $3 = \mu + 2\sigma$.

Or, d'après le cours: $P(\mu - 2\sigma \leqslant T \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$.

D'où: $P(2 \leqslant T \leqslant 3) \approx 95,4\%$.

Au total, la probabilité qu'une performance prise au hasard se situe entre 2 heures et 3 heures est d'environ: 95, 4%.

3. Déterminons " t ", à la minute près, tel que $P(T \leqslant t) = 0,75$ et interprétons:

Il s'agit de déterminer " t " sachant que: $P(T \leqslant t) = 0,75$.

$$P(T \leqslant t) = 0,75 \iff P\left(\frac{T - \mu}{\sigma} \leqslant \frac{t - 2,5}{0,25}\right) = 0,75$$

$$\iff P\left(Y \leqslant \frac{t - 2,5}{0,25}\right) = 0,75.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$\frac{t - 2,5}{0,25} \approx 0,6745$ cad: $t \approx 2,67$ heures, soit: $t = 160$ minutes, arrondie à la minute près.

Au total: $P(T \leqslant t) = 0,75$ quand $t = 160$ minutes, arrondie à la minute près.

Cela signifie que 75% des participants ont une performance inférieure ou égale à 160 minutes (pour effectuer les trois épreuves du parcours).

Partie C:

1. **Calculons l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de femmes dans un échantillon aléatoire de 60 fiches:**

Ici, nous avons:
- $n = 60$
- $p = 50\%$
- $f = \frac{25}{60}$ cad: $f \approx 41,67\%$.

Dans ces conditions:

$n = 60 \geqslant 30$, $n \cdot p = 30 \geqslant 5$ et $n \cdot (1 - p) = 30 \geqslant 5$.

Les conditions sont donc réunies.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \, ; \, p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right],$$

cad: $$I = \left[50\% - 1,96 \times \sqrt{\frac{50\% \times 50\%}{60}} \, ; \, 50\% + 1,96 \times \sqrt{\frac{50\% \times 50\%}{60}} \right].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $\mathbf{I \approx [\,0,373\,;\,0,627\,]}$.

Ainsi, l'intervalle demandé est: $I \approx [\,0,373\,;\,0,627\,]$.

2. Ce constat remet-il en question l'affirmation de l'organisateur ?

Ici, la fréquence " f ", sur l'échantillon, est telle que: $f \approx 41,67\% \in \mathbf{I}$.

Ainsi, **non** ce constat ne remet donc pas en cause l'affirmation de l'organisateur.