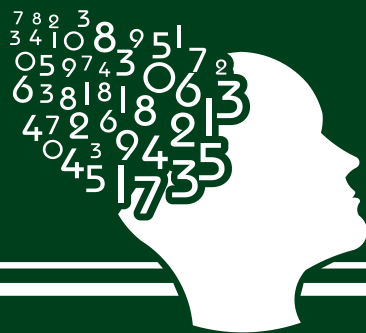


Corrigé

Exercice 3



freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

ÉPREUVE DU MARDI 29 MAI 2018

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 9 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE n°3 (5 points)

Deux entreprises concurrentes « Alphacopy » et « Bêtacopy » proposent des contrats annuels d'entretien de photocopieurs. Ces deux entreprises se partagent le marché des contrats d'entretien sur un secteur donné.

Le patron de Alphacopy remarque que, chaque année :

- 15% des clients qui avaient souscrit un contrat d'entretien chez Alphacopy décident de souscrire un contrat d'entretien chez Bêtacopy. Les autres restent fidèles à Alphacopy.
- 25% des clients qui avaient souscrit un contrat d'entretien chez Bêtacopy décident de souscrire un contrat d'entretien chez Alphacopy. Les autres restent fidèles à Bêtacopy.

On définit les événements suivants :

- A : « le client est sous contrat avec l'entreprise Alphacopy » ;
- B : « le client est sous contrat avec l'entreprise Bêtacopy ».

À partir de 2017, on choisit au hasard un client ayant un contrat d'entretien de photocopieurs et on note, pour tout entier naturel n :

- a_n la probabilité que le client soit sous contrat avec l'entreprise Alphacopy l'année $2017 + n$;
- b_n la probabilité que le client soit sous contrat avec l'entreprise Bêtacopy l'année $2017 + n$.

On note $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2017 + n$.

L'objectif de l'entreprise Alphacopy est d'obtenir au moins 62 % des contrats d'entretien de photocopieurs.

Partie A

1. Représenter le graphe probabiliste de cette situation et donner la matrice de transition M associée au graphe dont les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique.
2. Montrer que $P = (0,625 \quad 0,375)$ est un état stable de la matrice.
3. À votre avis, l'entreprise Alphacopy peut-elle espérer atteindre son objectif ?

Partie B

En 2017, on sait que 46 % des clients ayant un contrat d'entretien de photocopieurs étaient sous contrat avec l'entreprise Alphacopy.

On a ainsi $P_0 = (0,46 \quad 0,54)$.

1. On rappelle que pour tout entier naturel n , $P_{n+1} = P_n \times M$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,85a_n + 0,25b_n$ puis que

$$a_{n+1} = 0,60a_n + 0,25.$$

2. À l'aide de l'algorithme ci-dessous, on cherche à déterminer en quelle année l'entreprise Alphacopy atteindra son objectif.

```
n ← 0
a ← 0,46
Tant que .....
    n ← n + 1
    .....
Fin Tant que
Afficher 2017 + n
```

- a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessus.
- b. Quelle est l'année affichée en sortie de l'algorithme ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
3. On définit la suite (u_n) par $u_n = a_n - 0,625$ pour tout entier naturel n .
- a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_0 .

- b. Exprimer u_n en fonction de n puis démontrer que, pour tout entier n ,

$$a_n = -0,165 \times 0,60^n + 0,625.$$

- c. Résoudre par le calcul l'inéquation $a_n \geq 0,62$.

Quel résultat de la question 2. retrouve-t-on ?

EXERCICE 3

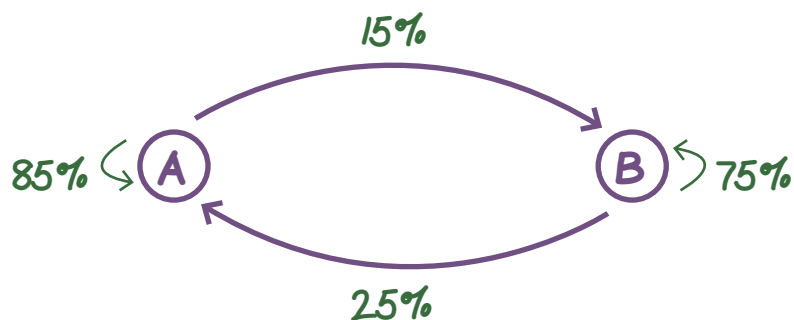
[Amérique du Nord 2018]

Partie A:

1. a. Représentons le graphe probabiliste de cette situation:

- Soient:
- A, l'état: " sous contrat avec Alphacopy ",
 - B, l'état: " sous contrat avec Bêtacopy ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:



1. b. Donnons la matrice de transition M:

La matrice associée à ce graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 85\% & 15\% \\ 25\% & 75\% \end{pmatrix}.$$

2. Montrons que $P = (0,625 \quad 0,375)$ est l'état stable:

Soit P l'état stable de ce graphe.

P vérifie: $P = P \times M$, car l'état stable P est l'unique solution de l'équation

$$P = P \times M.$$

Posons: $P = (0,625 \quad 0,375)$. $(0,625 + 0,375 = 1)$

$$P \times M = (0,625 \quad 0,375) \begin{pmatrix} 85\% & 15\% \\ 25\% & 75\% \end{pmatrix} \Leftrightarrow P \times M = (0,625 \quad 0,375).$$

Ainsi, nous avons: $P \times M = P$, avec: $P = (0,625 \quad 0,375)$.

Donc: P correspond bien à l'état stable du système avec $0,625 + 0,375 = 1$.

3. L'entreprise Alphacopy peut-elle espérer atteindre son objectif ?

D'après l'énoncé: " l'objectif de l'entreprise Alphacopy est d'obtenir au moins 62% des contrats d'entretien ".

L'état stable P nous indique, au bout de n années (" n très grand "), le pourcentage de clients qui auront souscrit à un contrat chez Alphacopy, ainsi que celui des clients qui auront souscrit à un contrat chez Bêtacopy.

Comme ici: $P = (62,5\% \quad 37,5\%)$, nous pouvons affirmer qu'à long terme, 62,5% des clients auront souscrit à un contrat chez Alphacopy.

Donc: oui, Alphacopy peut espérer atteindre son objectif car $62,5\% > 62\%$.

Partie B:

1. a. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0,85a_n + 0,25b_n$:

D'après le cours, nous savons que, pour tout entier naturel n , P_{n+1} , en fonction de P_n s'écrit: $P_{n+1} = P_n \times M$.

$$P_{n+1} = P_n \times M \Leftrightarrow (a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (a_n \quad b_n) \begin{pmatrix} 85\% & 15\% \\ 25\% & 75\% \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (0,85a_n + 0,25b_n \quad 0,15a_n + 0,75b_n)$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} = 0,85a_n + 0,25b_n \text{ et } b_{n+1} = 0,15a_n + 0,75b_n.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons bien: $a_{n+1} = 0,85a_n + 0,25b_n$.

1. b. Déduisons-en que $a_{n+1} = 0,60a_n + 0,25$:

Nous avons: $a_n + b_n = 1$ ce qui revient à dire que $b_n = 1 - a_n$.

$$\text{D'où: } a_{n+1} = 0,85a_n + 0,25b_n \Leftrightarrow a_{n+1} = 0,85a_n + 0,25(1 - a_n)$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} = 0,60a_n + 0,25.$$

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons bien: $a_{n+1} = 0,60a_n + 0,25$.

2. a. Recopions et complétons l'algorithme:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

```

n ← 0
a ← 0,46
Tant que a < 0,62
    | n ← n + 1
    | a ← 0,60 × a + 0,25
Fin Tant que
Afficher 2017 + n

```

2. b. Déterminons l'année en sortie de l'algorithme et interprétons cette valeur:

Pour répondre à cette question, à l'aide d'une machine à calculer, nous avons établi le tableau suivant:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0,46	0,526	0,5656	0,5893	0,6036	0,6121	0,6173	0,6203

Donc, dès que $n = 7$: $a_n \geq 0,62$

Ainsi, l'année en sortie de l'algorithme est: $n = 7$ ans.

Or: $2017 + 7 = 2024$.

Cela signifie donc que l'entreprise Alphacopy atteindra son objectif en 2024.

3. a. Montrons que la suite (U_n) est géométrique et déterminons U_0 et q :

$$U_n = a_n - 0,625 \Leftrightarrow U_{n+1} = a_{n+1} - 0,625$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} = (0,60 \times a_n + 0,25) - 0,625 \quad (1).$$

$$\text{Or: } U_0 = a_0 - 0,625 \Rightarrow U_0 = 0,46 - 0,625 = -0,165 \text{ et } a_n = U_n + 0,625.$$

$$\text{Ainsi: } (1) \Leftrightarrow U_{n+1} = (0,60 [U_n + 0,625] + 0,25) - 0,625$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} = 0,60 U_n.$$

Par conséquent, (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,60$ et de premier terme $U_0 = -0,165$.

3. b. Exprimons U_n en fonction de n et montrons que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $a_n = -0,165 \times 0,60^n + 0,625$:

Comme $U_{n+1} = 0,60 U_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$U_n = -0,165 \times (0,60)^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

De plus: $a_n = U_n + 0,625$.

D'où: $a_n = -0,165 \times (0,60)^n + 0,625$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Au total, pour tout entier naturel n , nous avons bien:

$$a_n = -0,165 \times 0,60^n + 0,625.$$

3. c. c1. Résolvons l'inéquation $a_n \geq 0,62$:

$$a_n \geq 0,62 \iff -0,165 \times 0,60^n + 0,625 \geq 0,62$$

$$\iff 0,60^n \leq \frac{0,005}{0,165}$$

$$\iff n \ln(0,60) \leq \ln\left(\frac{0,005}{0,165}\right)$$

$$\iff n \geq \frac{\ln\left(\frac{0,005}{0,165}\right)}{\ln(0,60)}, \text{ car: } 0,60 \in]0,1[, \text{ et donc: } \ln(0,60) < 0$$

$$\iff n \geq 6,85.$$

Nous prendrons $n = 7$ car n est un entier naturel.

3. c. c2. Quel résultat retrouve-t-on ?

Nous retrouvons le fait qu'en $2017 + 7 = 2024$, l'entreprise Alphacopy atteindra pour la première fois son objectif: "obtenir au moins 62% des contrats d'entretien".