Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

ÉPREUVE DU MARDI 29 MAI 2018

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 9 pages, y compris celle-ci.

Exercice n°2 (5 points)

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Le site internet « ledislight.com » spécialisé dans la vente de matériel lumineux vend deux sortes de rubans LED flexibles : un premier modèle dit d'« intérieur » et un deuxième modèle dit d'« extérieur ». Le site internet dispose d'un grand stock de ces rubans LED.

Partie A

1. Le fournisseur affirme que, parmi les rubans LED d'extérieur expédiés au site internet, 5% sont défectueux. Le responsable du site internet désire vérifier la validité de cette affirmation. Dans son stock, il prélève au hasard 400 rubans LED d'extérieur parmi lesquels 25 sont défectueux.

   Ce contrôle remet-il en cause l'affirmation du fournisseur ?

<u>Rappel :</u> Lorsque la proportion p d'un caractère dans la population est connue, l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % d'une fréquence d'apparition de ce caractère obtenue sur un échantillon de taille n est donnée par :

$$I = \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,; p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

2. Le fournisseur n'a donné aucune information concernant la fiabilité des rubans LED d'intérieur. Le directeur du site souhaite estimer la proportion de rubans LED d'intérieur défectueux. Pour cela, il prélève un échantillon aléatoire de 400 rubans d'intérieur, parmi lesquels 38 sont défectueux.

   Donner un intervalle de confiance de cette proportion au seuil de confiance de 95%.

Partie B

À partir d'une étude statistique réalisée sur de nombreux mois, on peut modéliser le nombre de rubans LED d'intérieur vendus chaque mois par le site à l'aide d'une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 2500$ et d'écart-type $\sigma = 400$.

1. Quelle est la probabilité que le site internet vende entre 2100 et 2900 rubans LED d'intérieur en un mois ?

2.

a. Trouver, arrondie à l'entier, la valeur de a tel que $P(X \leq a) = 0{,}95$.

b. Interpréter la valeur de a obtenue ci-dessus en termes de probabilité de rupture de stock.

Partie C

On admet maintenant que :

- 20% des rubans LED proposés à la vente sont d'extérieur ;
- 5% des rubans LED d'extérieur sont défectueux.

On prélève au hasard un ruban LED dans le stock.

On appelle :

- E l'événement : « le ruban LED est d'extérieur » ;
- D l'événement : « le ruban LED est défectueux ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré, que l'on complètera au fur et à mesure.

2. Déterminer la probabilité que le ruban LED soit d'extérieur et défectueux.

3. D'autre part on sait que 6% de tous les rubans LED sont défectueux. Calculer puis interpréter $P_{\bar{E}}(D)$.

EXERCICE 2

[Amérique du Nord 2018]

Partie A:

1. Le contrôle remet-il en cause l'affirmation du fournisseur ?

Ici, nous avons: • $n = 400$

• $p = 5\%$

• $f = \dfrac{25}{400}$ => $f \approx 6,25\%$.

Dans ces conditions:

$n = 400 \geqslant 30$, $n \cdot p = 20 \geqslant 5$ et $n \cdot (1 - p) = 380 \geqslant 5$.

Les conditions sont donc réunies.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}} \,;\, p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}} \right],$$

cad: $I = \left[5\% - 1,96 \times \sqrt{\dfrac{5\% \times 95\%}{400}} \,;\, 5\% + 1,96 \times \sqrt{\dfrac{5\% \times 95\%}{400}} \right]$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [\,2,9\%\,;\,7,1\%\,]$.

Or la fréquence " f ", sur l'échantillon, est telle que: $f \approx 6,25\% \in I$.

Ainsi, **non** le contrôle ne remet pas en cause l'affirmation du fournisseur.

2. Donnons un intervalle de confiance de cette proportion au seuil de confiance 95%:

D'après le cours, nous savons qu'un intervalle de confiance, au niveau de confiance 95%, nous est donné par la formule suivante:

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \, ; \, f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right],$$

avec ici:
- $n = 400 \geqslant 30$
- $f = \frac{38}{400} = 9,5\%$
- $n \cdot f = 38 \geqslant 5$ et $n \cdot (1 - f) = 362 \geqslant 5$.

D'où: $I = \left[9,5\% - \frac{1}{20} \, ; \, 9,5\% + \frac{1}{20} \right] \Rightarrow I \approx [\, 4,5\% ; \, 14,5\% \,]$.

Au total, l'intervalle de confiance demandé est: $I \approx [\, 4,5\% ; \, 14,5\% \,]$.

Partie B:

1. Déterminons la probabilité que le site internet vende entre 2 100 et 2 900 rubans LED en un mois:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X suit la loi normale d'espérance $\mu = 2\,500$ rubans et d'écart type $\sigma = 400$ rubans.
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de calculer: $P(2\,100 \leqslant X \leqslant 2\,900)$.

Nous remarquons que: $2\,100 = \mu - \sigma$ et $2\,900 = \mu + \sigma$.

Or, d'après le cours: $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,683$.

D'où: $P(2\,100 \leqslant X \leqslant 2\,900) \approx 0,683$.

Au total, la probablité que le site internet vende entre 2 100 et 2 900 rubans LED d'intérieur en un mois est d'environ: 68, 3%.

2. a. Trouvons la valeur de " a " telle que $P(X \leqslant a) = 0,95$:

Il s'agit de déterminer " a " sachant que: $P(X \leqslant a) = 0,95$.

$$P(X \leqslant a) = 0,95 \iff P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{a - 2\,500}{400}\right) = 0,95$$

$$\iff P\left(T \leqslant \frac{a - 2\,500}{400}\right) = 0,95.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\frac{a - 2\,500}{400} \approx 1,65 \Rightarrow a \approx 3\,160 \text{ rubans, arrondie à l'unité.}$$

Au total: $P(X \leqslant a) = 0,95$ quand $a \approx 3\,160$ rubans.

2. b. Interprétons la valeur de " a " trouvée:

Cela signifie que la probabilité de vendre chaque mois sur le site moins de 3 160 rubans LED d'intérieur est de: 95%.

En d'autres termes, si l'entreprise possède 3 160 rubans LED d'intérieur en stock, elle a 95% de chance de ne pas être en rupture de stock.

Partie C:

1. Représentons la situation à l'aide d'un arbre pondéré:

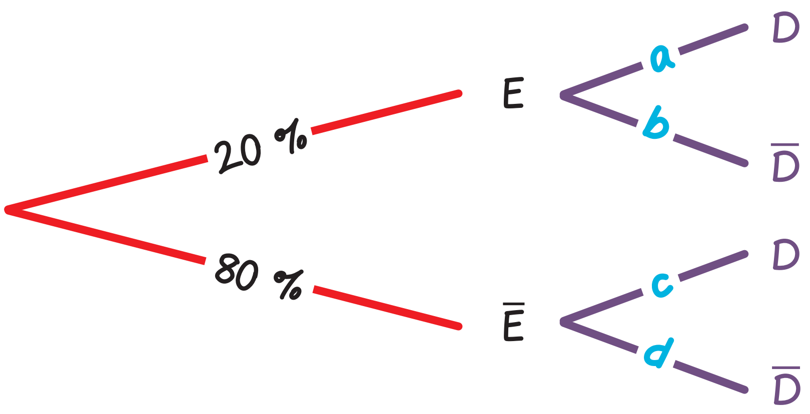
D'après l'énoncé, nous avons:

- E = " le ruban LED est d'extérieur ".
- $\overline{E}$ = " le ruban LED est d'intérieur ".
- D = " le ruban LED est défectueux ".
- $\overline{D}$ = " le ruban LED n'est pas défectueux ".

- $P(E) = 20\%$
- $P(\overline{E}) = 1 - 20\% = 80\%$.

- $P_E(D) = 5\%$
- $P_E(\overline{D}) = 95\%$.

Nous avons ainsi l'arbre pondéré suivant:



, avec:
- $a = 5\%$
- $b = 95\%$
- $c = ?$
- $d = ?$

2. Déterminons la probabilité que le ruban LED soit d'extérieur et défectueux:

Cela revient à calculer: $P(E \cap D)$.

$P(E \cap D) = P_E(D) \times P(E)$.

Ainsi: $P(E \cap D) = 5\% \times 20\%$ cad: $P(E \cap D) = 1\%$.

Au total, il y a 1% de chance pour que le ruban LED soit d'extérieur et défectueux.

3. Calculons puis interprétons $P_{\overline{E}}(D)$:

Nous devons calculer: $P_{\overline{E}}(D)$.

$$P_{\overline{E}}(D) = \frac{P(\overline{E} \cap D)}{P(\overline{E})}$$

$$= \frac{[P(D) - P(E \cap D)]}{P(\overline{E})}.$$

Ainsi: $P_{\overline{E}}(D) = \dfrac{[6\% - 1\%]}{80\%}$ cad: $P_{\overline{E}}(D) = 6,25\%$.

Au total: 6, 25% des rubans LED d'intérieur sont défectueux.