Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2017

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6.

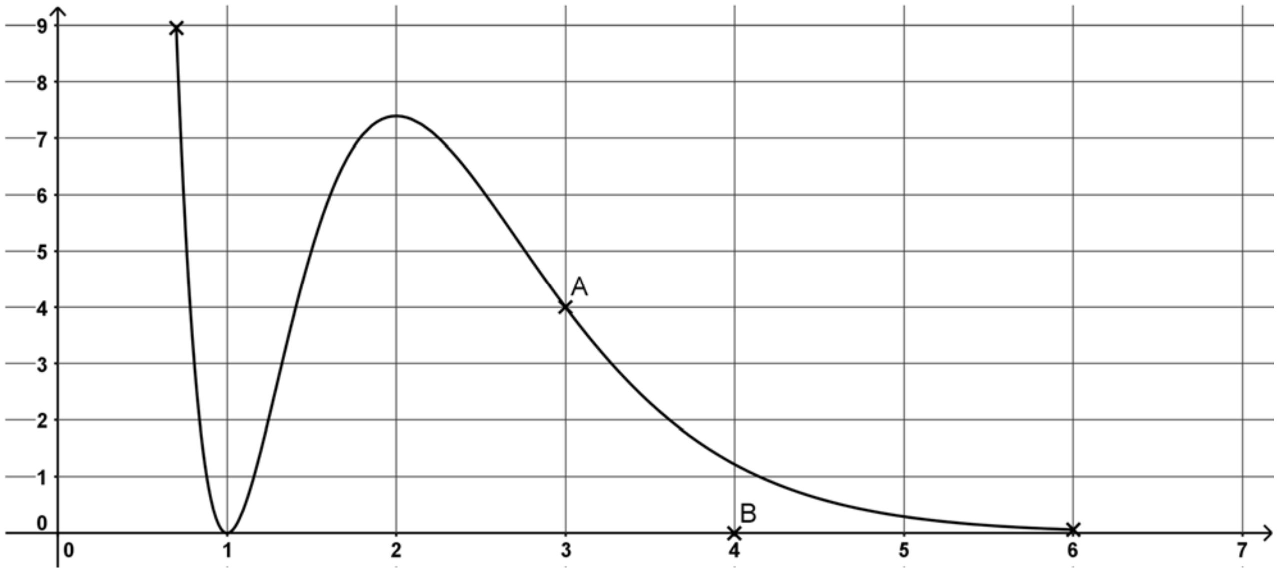
EXERCICE 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0,7\,;\,6]$; on suppose que f est dérivable.

PARTIE A : *Étude graphique*

On a représenté la fonction f sur le graphique ci-dessous.



1) La tangente au point d'abscisse 3 à la courbe représentative de f passe par les points $A(3\,;4)$ et $B(4\,;0)$. Déterminer $f'(3)$.

2) D'après le graphique ci-dessus, donner le tableau de signe de f' sur l'intervalle $[0,7\,;\,6]$.

PARTIE B : *Étude théorique*

On admet que la fonction f est définie par $f(x) = (x^2 - 2x + 1)\mathrm{e}^{-2x+6}$.

1) Montrer que $f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)\mathrm{e}^{-2x+6}$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

2) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,7\,;\,6]$ et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,7\,;\,6]$. On ne demande pas de calculer les ordonnées.

3) À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous qui pourront être utilisés sans être démontrés.

L1	$f'(x) \coloneqq (-2x\hat{}2 + 6x - 4) * \mathrm{e}\hat{}(-2x + 6)$ $\rightarrow f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)\mathrm{e}^{-2x+6}$
L2	$g(x) \coloneqq$ Dérivée[$f'(x)$] $\rightarrow g(x) = -16x\mathrm{e}^{-2x+6} + 4x^2\mathrm{e}^{-2x+6} + 14\mathrm{e}^{-2x+6}$
L3	Factoriser[$g(x)$] $\rightarrow 2\mathrm{e}^{-2x+6}(2x^2 - 8x + 7)$
L4	Résoudre[$g(x) = 0$] $\rightarrow \left\{x = \frac{-\sqrt{2}+4}{2} ; x = \frac{\sqrt{2}+4}{2}\right\}$
L5	$F(x) \coloneqq$ Primitive[$f(x)$] $\rightarrow F(x) = \frac{1}{4}(-2x^2 + 2x - 1)\mathrm{e}^{-2x+6}$

a) Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est concave.

b) La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion ? Si oui, en donner l'abscisse.

c) On pose $I = \int_3^5 f(x)\mathrm{d}x$. Calculer la valeur exacte de I puis la valeur arrondie à 10^{-1} .

EXERCICE 4

[Amérique du Nord 2017]

Partie A : Étude graphique

1. Déterminons $f'(3)$:

Nous savons que la tangente à la courbe Cf, au point $x = 3$, passe par les points : A (3; 4) et B (4 ; 0).

Soit $y = ax + b$, l'équation de cette tangente.

" $a = f'(3)$ " est le coefficient directeur et est tel que :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \iff a = \frac{0 - 4}{4 - 3} \Rightarrow a = -4.$$

Au total, $f'(3)$ est tel que : $f'(3) = -4$.

2. Donnons le tableau de signe de f' sur l'intervalle [0,7 ; 6] :

Nous avons le tableau de signe de f' suivant :

x	0,7		1		2		6
f'		-	0	+	0	-	

Partie B : Étude théorique

1. Montrons que $f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)\, e^{-2x+6}$:

Ici : • $f(x) = (x^2 - 2x + 1)\, e^{-2x+6}$ **(u x v)**

• $Df = [\,0,7\,;\,6\,]$.

Posons : $f = f_1 \times f_2$, avec : $f_1(x) = x^2 - 2x + 1$ et $f_2(x) = e^{-2x+6}$.

f_1 est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur l'intervalle $[\,0,7\,;\,6\,]$.

f_2 est dérivable sur IR comme fonction exponentielle, donc dérivable sur l'intervalle $[\,0,7\,;\,6\,]$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[\,0,7\,;\,6\,]$ comme produit **($f_1 \times f_2$)** de 2 fonctions dérivables sur $[\,0,7\,;\,6\,]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\,0,7\,;\,6\,]$.

Pour tout $x \in [\,0,7\,;\,6\,]$:

$$f'(x) = (2x - 2) \times e^{-2x+6} + (x^2 - 2x + 1) \times (-2) \times e^{-2x+6} \quad \mathbf{(u' \times v + u \times v')}$$

$$\Rightarrow f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)\, e^{-2x+6}.$$

Au total, pour tout $x \in [\,0,7\,;\,6\,]$: $f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)\, e^{-2x+6}$.

2. a. Étudions le sens de variation de f sur $[\,0,7\,;\,6\,]$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [\,0,7\,;\,6\,]$.

Préalablement déterminons les solutions de l'équation : $-2x^2 + 6x - 4 = 0$.

$\Delta = 4 > 0$, d'où 2 solutions : • $x' = \dfrac{-6-2}{-4}$ $\Rightarrow$ $x' = 2$,

• $x'' = \dfrac{-6+2}{-4} \Rightarrow x'' = 1.$

D'où les 3 cas:

• **1er cas**: $f'(x) = 0.$

$f'(x) = 0$ ssi $(-2x^2 + 6x - 4)\, e^{-2x+6} = 0$

$\iff (-2x^2 + 6x - 4) = 0$ (pour tout $x \in [\,0,7 ; 6\,]$, $e^{-2x+6} > 0$)

cad: $x = 1$ ou $x = 2.$

• **2ème cas**: $f'(x) < 0.$

$f'(x) < 0$ ssi $(-2x^2 + 6x - 4)\, e^{-2x+6} < 0$

$\iff (-2x^2 + 6x - 4) < 0$ (pour tout $x \in [\,0,7 ; 6\,]$, $e^{-2x+6} > 0$)

cad: $x \in [\,0,7 ; 1\,[\cup]\,2 ; 6\,].$

• **3ème cas**: $f'(x) > 0.$

$f'(x) > 0$ ssi $(-2x^2 + 6x - 4)\, e^{-2x+6} > 0$

$\iff (-2x^2 + 6x - 4) > 0$ (pour tout $x \in [\,0,7 ; 6\,]$, $e^{-2x+6} > 0$)

cad: $x \in]\,1 ; 2\,[.$

Au total: • f est décroissante sur $[\,0,7 ; 1\,[\cup]\,2 ; 6\,]$,

(car sur $[\,0,7 ; 1\,] \cup [\,2 ; 6\,]$, $f'(x) \leqslant 0$)

• f est croissante sur $[\,1 ; 2\,].$

(car sur $[\,1 ; 2\,]$, $f'(x) \geqslant 0$)

2. b. Donnons le tableau de variation de f sur $[\,0,7\,;6\,]$:

Comme nous l'avons déjà dit: • f est décroissante sur $[\,0,7\,;\,1\,] \cup [\,2\,;6\,]$,

• f est croissante sur $[\,1\,;2\,]$.

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	0,7		1		2		6
f'		-	0	+	0	-	
f	a	↘	b	↗	c	↘	d

Avec: • $a = f(0,7) \Rightarrow a = \ldots$,

• $b = f(1) \Rightarrow b = 0$,

• $c = f(2) \Rightarrow c = e^2$,

• $d = f(6) \Rightarrow d = 25$.

3. a. Déterminons le plus grand intervalle sur lequel f est concave:

Soit $[\,e\,;f\,]$, l'intervalle recherché.

Ici: • $f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)\,e^{-2x+6}$

• $f''(x) = g(x) = 2\,(2x^2 - 8x + 7)\,e^{-2x+6}$. (logiciel)

f est concave sur $[\,e\,;f\,]$ ssi: pour tout $x \in [\,e\,;f\,]$, $f''(x) \leq 0$.

Or le signe de f'' dépend du signe de: $2x^2 - 8x + 7$ (car $e^{-2x+6} > 0$).

Les racines de l'équation $2x^2 - 8x + 7 = 0$ sont donc:

$$x' = \frac{-\sqrt{2}+4}{2} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{\sqrt{2}+4}{2}. \quad \text{(logiciel)}$$

Dans ces conditions: $f''(x) \leqslant 0$ ssi $2x^2 - 8x + 7 \leqslant 0$,

cad: $x \in \left[\frac{-\sqrt{2}+4}{2} ; \frac{\sqrt{2}+4}{2} \right]$.

Au total: f est concave sur $[\,e ; f\,] = \left[\frac{-\sqrt{2}+4}{2} ; \frac{\sqrt{2}+4}{2} \right]$.

3. b. Déterminons les points d'inflexion de f:

> Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Or c'est le cas quand: $x = \frac{-\sqrt{2}+4}{2}$ et $x = \frac{\sqrt{2}+4}{2}$.

Au total, la courbe représentative de f admet 2 points d'inflexion:

$$A = \left(\frac{-\sqrt{2}+4}{2} ; f\left(\frac{-\sqrt{2}+4}{2} \right) \right) \quad \text{et} \quad B \left(\frac{\sqrt{2}+4}{2} ; f\left(\frac{\sqrt{2}+4}{2} \right) \right).$$

3. c. Calculons la valeur exacte de I, puis la valeur arrondie à 10^{-1}:

Ici, il s'agit de calculer: $I = \int_3^5 f(x)\,dx$

cad: $I = \int_3^5 (x^2 - 2x + 1)\, e^{-2x+6}\,dx$.

f est continue sur $[\,3 ; 5\,]$, elle admet donc des primitives sur $[\,3 ; 5\,]$ et par conséquent: I existe.

$$I = \int_3^5 f(x)\,dx$$

$$= [\,F(x)\,]_3^5$$

$$= [\,\frac{1}{4}(-2x^2 + 2x - 1)\,e^{-2x+6}\,]_3^5 \quad \text{(logiciel)}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{13 - 41\,e^{-4}}{4} \quad \text{ou} \quad I \approx 3,1 \quad \text{(valeur arrondie à } 10^{-1}\text{)}.$$

Au total: $I = \dfrac{13 - 41\,e^{-4}}{4}$ (valeur exacte)

ou $I \approx 3,1$ (valeur arrondie à 10^{-1}).