Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2017

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

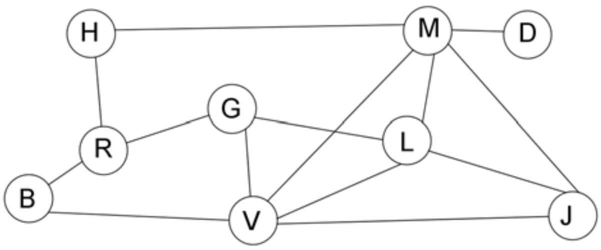
Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6.

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Sarah, une jeune étudiante en géologie, souhaite partir en voyage en Islande avec des amis. Elle a loué une voiture tout terrain pour pouvoir visiter les lieux remarquables qu'elle a sélectionnés.
Sarah a construit le graphe ci-dessous dont les sommets représentent les lieux à visiter et les arêtes représentent les routes ou pistes :



B : Le lagon bleu.
D : Chute d'eau de Dettifoss.
G : Geyser de Geysir.
H : Rocher Hvítserkur.
J : Lagune glacière de Jökulsárlón.
L : Massif du Landmannalaugar.
M : Lac de Mývatn.
R : Capitale Reykjavik.
V : Ville de Vík.

1) Dans cette question, chaque réponse sera justifiée.

a) Déterminer l'ordre du graphe.
b) Déterminer si le graphe est connexe.
c) Déterminer si le graphe est complet.

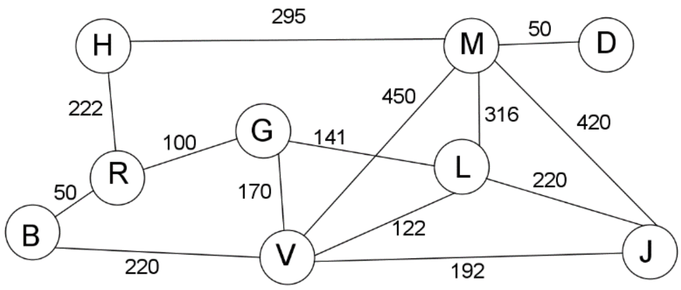
2) Sarah désire emprunter toutes les routes une et une seule fois. Déterminer, en justifiant, si cela est possible.

3) On appelle M la matrice associée au graphe précédent sachant que les sommets sont placés dans l'ordre alphabétique. On donne ci-dessous une partie de la matrice M ainsi que la matrice M^4 :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^4 = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 16 & 8 & 14 & 13 & 15 & 2 & 10 \\ 3 & 5 & 5 & 6 & 9 & 11 & 6 & 3 & 12 \\ 16 & 5 & 24 & 11 & 23 & 21 & 26 & 5 & 20 \\ 8 & 6 & 11 & 10 & 13 & 14 & 9 & 3 & 14 \\ 14 & 9 & 23 & 13 & 28 & 29 & 29 & 8 & 30 \\ 13 & 11 & 21 & 14 & 29 & 38 & 32 & 15 & 40 \\ 15 & 6 & 26 & 9 & 29 & 32 & 43 & 14 & 34 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 8 & 15 & 14 & 15 & 21 \\ 10 & 12 & 20 & 14 & 30 & 40 & 34 & 21 & 49 \end{pmatrix}$$

a) Il manque certains coefficients de la matrice M. Compléter et recopier uniquement la partie manquante de cette matrice.
b) Donner, en le justifiant, le nombre de chemins de longueur 4 permettant d'aller de B à D.

4) Sur le graphe pondéré ci-dessous, on a indiqué sur les arêtes les distances en kilomètre entre les différents lieux :



Déterminer à l'aide de l'algorithme de Dijkstra la distance minimale permettant d'aller du sommet B (Lagon bleu) au sommet D (Chute d'eau de Dettifoss).
Préciser alors le trajet à emprunter.

EXERCICE 3

[Amérique du Nord 2017]

1. a. Déterminons l'ordre du graphe:

Nous savons que l'ordre d'un graphe est égal au nombre de sommets.

Or ici, il y a: 9 sommets.

Ainsi: l'ordre du graphe est égal à 9.

1. b. Déterminons si le graphe est connexe:

Ici, le graphe est connexe car il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.

En effet, deux sommets quelconques de ce graphe peuvent, par exemple, être reliés par une chaîne extraite de la chaîne: D - M - H - R - B - V - G - L - J.

Au total: le graphe est donc connexe.

1. c. Déterminons si le graphe est complet:

D'après le cours, nous savons que:

- Deux sommets sont dits adjacents s'ils sont reliés par une arête.
- Un graphe dont les sommets sont 2 à 2 adjacents est aussi appelé graphe complet.

Ici, le graphe n'est pas complet car, par exemple, les sommets M et G ne sont pas adjacents.

Au total: le graphe n'est pas complet.

2. Déterminons s'il est possible d'emprunter toutes les routes une et une seule fois:

Cela revient à déterminer si le graphe admet une chaîne eulérienne.

D'après le cours:

G étant un graphe connexe, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- Deux sommets (et deux seulement) X et Y de G sont de degré impair.
- G admet une chaîne eulérienne d'extrémités X et Y.

Ici, le tableau des sommets degrés est le suivant:

Sommets	B	D	G	H	J	L	M	R	V
Degrés	2	1	3	2	3	4	5	3	5

Il y a donc 6 sommets D, G, J, M, R et V de degré impair.

Par conséquent: le graphe n'admet pas de chaîne eulérienne.

Au total: **non**, il n'est pas possible pour Sarah d'emprunter toutes les routes une et une seule fois.

3. a. Complétons la partie manquante de la matrice M:

La partie manquante correspond au résultat: $\begin{pmatrix} 15 & 6 & 26 \\ 2 & 3 & 5 \\ 10 & 12 & 20 \end{pmatrix}$ sur M^4.

Or nous remarquons qu'en haut à droite de M^4, nous avons:

$$X = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 10 \\ 6 & 3 & 12 \\ 26 & 5 & 20 \end{pmatrix}.$$

La partie correspondante à **X** sur M est:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ces conditions, par analogie, nous pouvons affirmer que la partie

manquante de M est: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Au total: $M = \begin{pmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & \end{pmatrix}.$

3. b. Donnons, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 4 pour aller de B à D:

Pour répondre à cette question, il suffit (dans M^4) de déterminer le nombre qui se trouve à l'intersection entre la colonne de B et la ligne de D (ou la ligne de B et la colonne de D).

On trouve ainsi: 3.

Donc il existe **3** chemins de longueur 4 pour aller de B à D.

Les 3 chemins sont:
- B - R - H - M - D
- B - V - L - M - D
- B - V - J - M - D.

4. Déterminons la distance minimale permettant d'aller du sommet B au sommet D, en précisant le trajet emprunté:

Après recours à l'algorithme de **Dijkstra**, nous trouvons comme trajet le plus court (minimisation de la distance) pour aller de B à D:

le trajet B - R - H - M - D.

Et ce trajet aura pour distance: $50 + 222 + 295 + 50 = 617$ km.

Au total, le trajet le plus court pour aller de B à D est:

B - R - H - M - D, et il aura pour distance 617 km.