Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2017

MATHÉMATIQUES
- Série ES -

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES
- Série L -

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 4

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6.

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Une grande université, en pleine croissance d'effectifs, accueillait 27 500 étudiants en septembre 2016. Le président de l'université est inquiet car il sait que, malgré une gestion optimale des locaux et une répartition des étudiants sur les divers sites de son université, il ne pourra pas accueillir plus de 33 000 étudiants.

Une étude statistique lui permet d'élaborer un modèle de prévisions selon lequel, chaque année :

- 150 étudiants démissionnent en cours d'année universitaire (entre le 1er septembre et le 30 juin) ;
- les effectifs constatés à la rentrée de septembre connaissent une augmentation de 4 % par rapport à ceux du mois de juin qui précède.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'étudiants estimé selon ce modèle à la rentrée de septembre 2016 + n, on a donc $u_0 = 27\ 500$.

1) a) Estimer le nombre d'étudiants en juin 2017.
b) Estimer le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre 2017.

2) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 1{,}04u_n - 156$.

3) Recopier et compléter les lignes L5, L6, L7 et L9 de l'algorithme suivant afin qu'il donne l'année à partir de laquelle le nombre d'étudiants à accueillir dépassera la capacité maximale de l'établissement.

```
L1   Variables :     n est un nombre entier naturel
L2                   U est un nombre réel
L3   Traitement :    n prend la valeur 0
L4                   U prend la valeur 27 500
L5                   Tant que U ≤ …………….  faire
L6                         n prend la valeur …………………
L7                         U prend la valeur ………………..
L8                   Fin Tant que
L9   Sortie :        Afficher ……
```

4) a) On fait fonctionner cet algorithme pas à pas.
Recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant le nombre nécessaire de colonnes ; on arrondira les valeurs de U à l'unité.

	Initialisation	Étape 1	…..
Valeur de n	0	…..	
Valeur de U	27 500	…..	

b) Donner la valeur affichée en sortie de cet algorithme.

5) On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n.
Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 3\ 900$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 23\ 600 \times 1{,}04^n + 3\ 900$.
c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 2

[Amérique du Nord 2017]

1. a. Estimons le nombre d'étudiants en juin 2017:

En septembre 2016, il y a $U_0 = 27500$ étudiants.

Or, 150 étudiants démissionnent entre le 1er septembre et le 30 juin cad au cours de l'année universitaire.

Dans ces conditions, le nombre d'étudiants en juin 2017 est de:

$$27500 - 150.$$

Ainsi, le nombre d'étudiants en juin 2017 est de: 27350.

1. b. Estimons le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre 2017:

D'après l'énoncé: " les effectifs constatés à la rentrée de septembre connaissent une augmentation de 4% par rapport à ceux du mois de juin qui précède ".

Il s'agit de calculer U_1.

$U_1 = (U_0 - 150) \times (1 + 4\%)$ <=> $U_1 = 27350 \times 1,04$

=> $U_1 = 28\,444$ étudiants.

Ainsi, le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre 2017 est de:

$$U_1 = 28\,444.$$

2. Justifions que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 1,04\,U_n - 156$:

• D'après l'énoncé, en septembre 2016, il y a 27500 étudiants.

D'où: $U_0 = 27500$ étudiants.

• De plus, chaque année, entre septembre et juin, 150 étudiants démissionnent et les effectifs à la rentrée de septembre connaissent une augmentation de 4% par rapport à ceux du mois de juin qui précède.

Soient: • U_{n+1}, le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre (2016 + (n+1)),

• U_n, le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre (2016 + (n)).

Pour tout entier naturel n, le nombre d'étudiants U_{n+1} est égal au nombre d'étudiants U_n diminué de 150 étudiants et (le résultat U_n - 150) augmenté de 4%.

Donc pour tout entier naturel n:

$U_{n+1} = (U_n - 150) \times (1 + 4\%) \iff U_{n+1} = 1,04\,U_n - 156.$

3. Recopions et complétons les lignes L_5, L_6, L_7 et L_9 de l'algorithme:

Les lignes L_5, L_6, L_7 et L_9 complétées sont les suivantes:

• L_5: Tant que $U \leqslant 33000$ faire

• L_6: n prend la valeur n+1

• L_7: U prend la valeur 1,04 U - 156

• L_9: Afficher 2016 + n

4. a. Recopions et complétons le tableau:

Le tableau complété est le suivant:

	Initialisation	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5	Étape 6
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6
Valeur de U	27500	28444	29426	30447	31509	32613	33762
	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022

Notons que l'établissement ne pourra pas accueillir plus de 33000 étudiants

(capacité maximale).

4. b. Donnons la valeur affichée en sortie de cet algorithme:

Nous nous arrêtons à l'étape 6 car c'est à partir de cette étape que l'établissement dépassera sa capacité maximale de 33000 étudiants.

En effet: 33762 étudiants > 33000 étudiants.

Ainsi, la valeur affichée en sortie de cet algorithme est de:

2016 + " 6 " cad 2022.

5. a. Montrons que la suite (V_n) est géométrique et déterminons V_0 et q:

$V_n = U_n - 3900 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 3900$

$\iff V_{n+1} = (1,04\, U_n - 156) - 3900 \quad (1).$

Or: $V_0 = U_0 - 3900 \Rightarrow V_0 = 23600$ et $U_n = V_n + 3900.$

Ainsi: $(1) \iff V_{n+1} = (1,04\,[\,V_n + 3900\,] - 156) - 3900$

$\Rightarrow V_{n+1} = 1,04\, V_n.$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 1,04$ et de premier terme $V_0 = 23600$.

5. b. Déduisons-en que, pour tout entier n, $U_n = 23600 \times (1,04)^n + 3900$:

Nous savons que: * $V_n = 23600 \times (1,04)^n$ (d'après le cours)

* $U_n = V_n + 3900$.

D'où: $U_n = 23600 \times (1,04)^n + 3900$.

5. c. c1. Déterminons la limite de la suite (U_n):

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} 23600 \times (1,04)^n + 3900$$

$$= +\infty \quad \text{car: } \lim_{n \to +\infty} (1,04)^n = +\infty, \text{ car: } 1,04 > 1.$$

La suite (U_n) est donc: divergente (cad pas convergente).

5. c. c2. Interprétation du résultat:

Cela signifie qu'au bout de n années (" n " très grand), le nombre d'étudiants sera infini et explosera ainsi la capacité maximale de l'établissement.