Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2016

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

Exercice 4 **6 points**

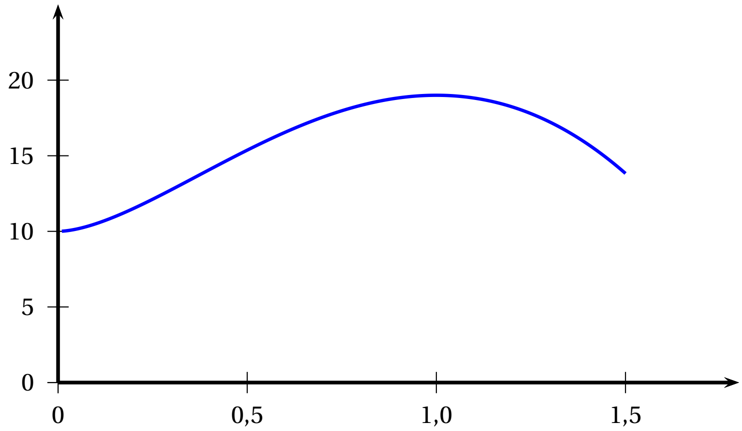
Commun à tous les candidats

Partie A : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,1{,}5]$ par

$$f(x) = 9x^2(1 - 2\ln x) + 10.$$

La courbe représentative de f est donnée ci-dessous :



1. **a.** Montrer que $f'(x) = -36x\ln x$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,1{,}5]$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,1{,}5]$.

   c. Déduire de la question précédente les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,1{,}5]$.

2. On admet que $f''(x) = -36\ln x - 36$ où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,1{,}5]$.

   Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion dont l'abscisse est e^{-1}.

3. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,1{,}5]$ par

$$F(x) = 10x + 5x^3 - 6x^3\ln x.$$

   a. Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $]0\,;\,1{,}5]$.

   b. Calculer $\displaystyle\int_1^{1{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   On donnera le résultat arrondi au centième.

Partie B : Application économique

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Une société est cotée en bourse depuis un an et demi.

Le prix de l'action depuis un an et demi est modélisé par la fonction f définie dans la partie A, où x représente le nombre d'années écoulées depuis l'introduction en bourse et $f(x)$ représente le prix de l'action, exprimé en euros.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si la proposition est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Proposition 1 :
« Sur la période des six derniers mois, l'action a perdu plus d'un quart de sa valeur. »

Proposition 2 :
« Sur la période des six derniers mois, la valeur moyenne de l'action a été inférieure à 17 €. »

EXERCICE 4

[Amérique du Nord 2016]

Partie A : Étude d'une fonction

1. a. **Montrons que $f'(x) = -36x\ln x$:**

Ici : • $f(x) = 9x^2(1 - 2\ln x) + 10$

• $Df =]0\,;1,5]$.

Posons : $f = f_1 \times (1 - 2f_2) + f_3$, avec : $f_1(x) = 9x^2$, $f_2(x) = \ln x$ et $f_3(x) = 10$.

f_1 et f_3 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme fonctions polynômes, donc dérivables sur l'intervalle $]0\,;1,5]$.

f_2 est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme fonction " ln ", donc dérivable sur $]0\,;1,5]$.

Par conséquent, $h = f_1 \times (1 - 2f_2)$ est dérivable sur $]0\,;1,5]$ comme produit de 2 fonctions dérivables sur $]0\,;1,5]$.

Donc, f est dérivable sur $]0\,;1,5]$ comme somme $(h + f_3)$ de 2 fonctions dérivables sur $]0\,;1,5]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]0\,;1,5]$.

Pour tout $x \in]0\,;1,5]$: $f'(x) = 18x(1 - 2\ln x) + 9x^2 \times \left(-\dfrac{2}{x}\right)$

$\Rightarrow$ $f'(x) = -36x\ln x$.

Au total: pour tout $x \in]0;1,5]$, $f'(x) = -36x\ln x$.

1. b. Étudions le signe de f' sur $]0;1,5]$:

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout x de $]0;1,5]$:

- **1er cas**: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $-36x\ln x = 0$ <=> $\ln x = 0$ (car $x \neq 0$), cad: $x = 1$.

- **2eme cas**: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $-36x\ln x < 0$ <=> $\ln x > 0$, cad: $x \in]1;1,5]$.

- **3eme cas**: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $-36x\ln x > 0$ <=> $\ln x < 0$, cad: $x \in]0;1[$.

Au total: • f est croissante sur $]0;1]$,

(car sur $]0;1]$, $f'(x) \geqslant 0$)

• f est décroissante sur $[1;1,5]$.

(car sur $[1;1,5]$, $f'(x) \leqslant 0$)

1. c. Déduisons-en les variations de f sur $]0;1,5]$:

Comme nous l'avons déjà dit: • f est croissante sur $]0;1]$,

• f est décroissante sur $[1;1,5]$.

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	0		1		$1,5$
f'		$+$	0	$-$	
f			b		
	a	↗		↘	c

Avec: • $a = \lim_{x \to 0^+} f(x) \Rightarrow a = -\infty$,

• $b = f(1) \Rightarrow b = 19$,

• $c = f(1,5) \Rightarrow c = 30,25 - 40,5\ln(1,5) > 0$.

2. Montrons que la courbe représentative de f admet un point d'inflexion dont l'abscisse est e^{-1}:

> Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Ici: $f''(x) = -36\ln x - 36$, pour tout $x \in]0;1,5]$.

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout $x \in]0;1,5]$:

• **1^er^ cas**: $f''(x) = 0$.

$f''(x) = 0$ ssi $-36\ln x - 36 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1$, cad: $x = e^{-1}$.

• **2^eme^ cas**: $f''(x) < 0$.

$f''(x) < 0$ ssi $-36\ln x - 36 < 0 \Leftrightarrow \ln x > -1$, cad: $x > e^{-1}$.

• **3^eme^ cas**: $f''(x) > 0$.

$f''(x) > 0$ ssi $-36\ln x - 36 > 0 \Leftrightarrow \ln x < -1$, cad: $x < e^{-1}$.

Au total: la dérivée seconde s'annule et change bien de signe quand $x = e^{-1}$.

Donc la courbe représentative f admet un point d'inflexion dont l'abscisse est:

$$x = e^{-1}.$$

3. a. Montrons que F est une primitive de f sur $]0\,;1,5]$:

$F(x) = 10x + 5x^3 - 6x^3 \ln x$

Ici: f est continue sur $]0\,;1,5]$. Elle admet donc une primitive F dérivable sur l'intervalle $]0\,;1,5]$ et F est telle que: $F' = f$.

Pour tout $x \in]0\,;1,5]$, $F'(x) = 10 + 15x^2 - (18x^2 \ln x + 6x^3 \times \left(\frac{1}{x}\right))$

$\iff F'(x) = 10 + 9x^2 - 18x^2 \ln(x)$

$\implies F'(x) = 9x^2 (1 - 2\ln x) + 10.$

Au total, on a bien, pour tout $x \in]0\,;1,5]$: F est une primitive de f car $F' = f$.

3. b. Calculons $\int_1^{1,5} f(x)dx$:

Ici, il s'agit de calculer: $I = \int_1^{1,5} f(x)dx.$

f est continue sur $]1\,;1,5]$, elle admet donc des primitives sur $]1\,;1,5]$ et par conséquent: I existe.

$I = \int_1^{1,5} [9x^2 (1 - 2\ln x) + 10]\, dx$

$= [10x + 5x^3 - 6x^3 \ln x]_1^{1,5}$

$\implies I = 16,875 - 20,25 \times \ln(1,5).$

En arrondissant au centième, nous obtenons: $I \approx 8,66.$

Au total, l'aire exacte demandée est: $I = 16,875 - 20,25 \times \ln(1,5)$ ou $I \approx 8,66.$

Partie B: Application économique

Proposition 1: " Sur la période des 6 derniers mois, l'action a perdu plus d'un quart de sa valeur ".

C'est vrai.

Justifions le.

La période des 6 derniers mois correspond à l'intervalle: $[1 ; 1,5]$.

Or, le pourcentage de variation entre $t = 1$ et $t = 1,5$ est: $\dfrac{f(1,5) - f(1)}{f(1)} \times 100$.

$$\frac{f(1,5) - f(1)}{f(1)} \times 100 = \frac{13,83 - 19}{19} \times 100$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(1,5) - f(1)}{f(1)} \times 100 \approx -27,21\%.$$

Dans ces conditions, le prix de l'action en $t = 1,5$ est de:

$$P_{1,5} = P_1 \, (1 - 27,21\%)$$

$$\Leftrightarrow \; P_{1,5} = 19 \, (1 - 27,21\%)$$

$$\Rightarrow \; P_{1,5} \approx 13,83 \text{ €}.$$

Au total, l'action a bien perdu plus d'un quart de sa valeur: $27,21\% > 25\%$.

Proposition 2: " Sur la période des 6 derniers mois, la valeur moyenne de l'action a été inférieure à 17 € ".

C'est faux.

Justifions le.

Pour justifier notre réponse, nous allons calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1 ; 1,5]$.

Soit " m ", la valeur moyenne de f sur $[1 ; 1,5]$.

m est telle que: $m = \frac{1}{1,5 - 1}\int_{1}^{1,5} f(x)dx$.

$$m = \frac{1}{1,5 - 1}\int_{1}^{1,5} f(x)dx \iff m = 2\int_{1}^{1,5} f(x)dx$$

$$\iff m = 2\,[F(x)]_{1}^{1,5}$$

$$\Rightarrow m \approx 17,33 \text{ €} > 17 \text{ €}.$$

Au total, sur la période des 6 derniers mois, la valeur moyenne de l'action a été supérieure à 17 €.