EXERCICE 4

[Amérique du Nord 2016]

Partie A : Étude d'une fonction

1. a. Montrons que $f'(x) = -36x\ln x$:

Ici : • $f(x) = 9x^2(1 - 2\ln x) + 10$

• $Df =]0\,;1,5]$.

Posons : $f = f_1 \times (1 - 2f_2) + f_3$, avec : $f_1(x) = 9x^2$, $f_2(x) = \ln x$ et $f_3(x) = 10$.

f_1 et f_3 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme fonctions polynômes, donc dérivables sur l'intervalle $]0\,;1,5]$.

f_2 est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme fonction " ln ", donc dérivable sur $]0\,;1,5]$.

Par conséquent, $h = f_1 \times (1 - 2f_2)$ est dérivable sur $]0\,;1,5]$ comme produit de 2 fonctions dérivables sur $]0\,;1,5]$.

Donc, f est dérivable sur $]0\,;1,5]$ comme somme $(h + f_3)$ de 2 fonctions dérivables sur $]0\,;1,5]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in\,]0\,;1,5]$.

Pour tout $x \in\,]0\,;1,5]$: $f'(x) = 18x(1 - 2\ln x) + 9x^2 \times \left(-\frac{2}{x}\right)$

$\Rightarrow$ $f'(x) = -36x\ln x$.

Au total: pour tout $x \in]0;1,5]$, $f'(x) = -36x\ln x$.

1. b. Étudions le signe de f' sur $]0;1,5]$:

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout x de $]0;1,5]$:

- **1er cas**: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $-36x\ln x = 0 \iff \ln x = 0$ (car $x \neq 0$), cad: $x = 1$.

- **2eme cas**: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $-36x\ln x < 0 \iff \ln x > 0$, cad: $x \in]1;1,5]$.

- **3eme cas**: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $-36x\ln x > 0 \iff \ln x < 0$, cad: $x \in]0;1[$.

Au total:
- f est croissante sur $]0;1]$,
  (car sur $]0;1]$, $f'(x) \geqslant 0$)
- f est décroissante sur $[1;1,5]$.
  (car sur $[1;1,5]$, $f'(x) \leqslant 0$)

1. c. Déduisons-en les variations de f sur $]0;1,5]$:

Comme nous l'avons déjà dit:
- f est croissante sur $]0;1]$,
- f est décroissante sur $[1;1,5]$.

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	0		1		$1,5$
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ => $a = -\infty$,

• $b = f(1)$ => $b = 19$,

• $c = f(1,5)$ => $c = 30,25 - 40,5\ln(1,5) > 0$.

2. Montrons que la courbe représentative de f admet un point d'inflexion dont l'abscisse est e^{-1}:

> Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Ici: $f''(x) = -36\ln x - 36$, pour tout $x \in]0;1,5]$.

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout $x \in]0;1,5]$:

• **1er cas**: $f''(x) = 0$.

$f''(x) = 0$ ssi $-36\ln x - 36 = 0$ <=> $\ln x = -1$, cad: $x = e^{-1}$.

• **2eme cas**: $f''(x) < 0$.

$f''(x) < 0$ ssi $-36\ln x - 36 < 0$ <=> $\ln x > -1$, cad: $x > e^{-1}$.

• **3eme cas**: $f''(x) > 0$.

$f''(x) > 0$ ssi $-36\ln x - 36 > 0$ <=> $\ln x < -1$, cad: $x < e^{-1}$.

Au total: la dérivée seconde s'annule et change bien de signe quand $x = e^{-1}$.

Donc la courbe représentative f admet un point d'inflexion dont l'abscisse est:

$$x = e^{-1}.$$

3. a. Montrons que F est une primitive de f sur $]0 ; 1,5]$:

$F(x) = 10x + 5x^3 - 6x^3 \ln x$

Ici: f est continue sur $]0 ; 1,5]$. Elle admet donc une primitive F dérivable sur l'intervalle $]0 ; 1,5]$ et F est telle que: $F' = f$.

Pour tout $x \in]0 ; 1,5]$, $F'(x) = 10 + 15x^2 - (18x^2 \ln x + 6x^3 \times \left(\frac{1}{x}\right))$

$\iff F'(x) = 10 + 9x^2 - 18x^2 \ln(x)$

$\Rightarrow F'(x) = 9x^2 (1 - 2 \ln x) + 10.$

Au total, on a bien, pour tout $x \in]0 ; 1,5]$: F est une primitive de f car $F' = f$.

3. b. Calculons $\int_1^{1,5} f(x)dx$:

Ici, il s'agit de calculer: $I = \int_1^{1,5} f(x)dx$.

f est continue sur $]1 ; 1,5]$, elle admet donc des primitives sur $]1 ; 1,5]$ et par conséquent: I existe.

$I = \int_1^{1,5} [9x^2 (1 - 2 \ln x) + 10]\, dx$

$= [10x + 5x^3 - 6x^3 \ln x]_1^{1,5}$

$\Rightarrow I = 16,875 - 20,25 \times \ln(1,5).$

En arrondissant au centième, nous obtenons: $I \approx 8,66$.

Au total, l'aire exacte demandée est: $I = 16,875 - 20,25 \times \ln(1,5)$ ou $I \approx 8,66$.

Partie B: Application économique

Proposition 1: " Sur la période des 6 derniers mois, l'action a perdu plus d'un quart de sa valeur ".

C'est vrai.

Justifions le.

La période des 6 derniers mois correspond à l'intervalle: $[1 ; 1,5]$.

Or, le pourcentage de variation entre $t = 1$ et $t = 1,5$ est: $\dfrac{f(1,5) - f(1)}{f(1)} \times 100$.

$$\frac{f(1,5) - f(1)}{f(1)} \times 100 = \frac{13,83 - 19}{19} \times 100$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(1,5) - f(1)}{f(1)} \times 100 \approx -27,21\%.$$

Dans ces conditions, le prix de l'action en $t = 1,5$ est de:

$$P_{1,5} = P_1\,(1 - 27,21\%)$$

$$\Leftrightarrow \quad P_{1,5} = 19\,(1 - 27,21\%)$$

$$\Rightarrow \quad P_{1,5} \approx 13,83 \text{ €}.$$

Au total, l'action a bien perdu plus d'un quart de sa valeur: $27,21\% > 25\%$.

Proposition 2: " Sur la période des 6 derniers mois, la valeur moyenne de l'action a été inférieure à 17 € ".

C'est faux.

Justifions le.

Pour justifier notre réponse, nous allons calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1 ; 1,5]$.

Soit " m ", la valeur moyenne de f sur $[1 ; 1,5]$.

m est telle que: $m = \frac{1}{1,5 - 1} \int_{1}^{1,5} f(x)dx$.

$$m = \frac{1}{1,5 - 1} \int_{1}^{1,5} f(x)dx \iff m = 2 \int_{1}^{1,5} f(x)dx$$

$$\iff m = 2 \left[F(x) \right]_{1}^{1,5}$$

$$\Rightarrow m \approx 17,33 \text{ €} > 17 \text{ €}.$$

Au total, sur la période des 6 derniers mois, la valeur moyenne de l'action a été supérieure à 17 €.