EXERCICE 2

[Amérique du Nord 2016]

1. Calculons le nombre d'abonnés à la date du 1er février 2016:

Il s'agit de calculer U_1.

$U_1 = (1 - 8\%)\ U_0 + 8000 \iff U_1 = 0,92 \times 4000 + 8000$

$\implies U_1 = 11680$ abonnés.

Ainsi, le nombre d'abonnés à la date du 1er février 2016 est de: 11680.

2. a. Recopions et complétons le tableau:

Le tableau complété est le suivant:

Valeur de U	4	11,7	18,7	25,2	31,2	36,7	41,8
Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6
Condition U < 40	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Fausse

2. b. Donnons et interprétons la valeur affichée en sortie:

La valeur affichée en sortie par cet algorithme est: $N = 6$.

Cela signifie que 6 mois après le 1er janvier 2016, le nombre total d'abonnés sera supérieur ou égal à 40000.

En d'autres termes, à partir du 1er juillet 2016, le nombre total d'abonnés sera supérieur ou égal à 40000.

3. a. Montrons que (V_n) est géométrique et déterminons V_0 et q:

$V_n = U_n - 100 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 100$

$\iff V_{n+1} = (0,92\,U_n + 8) - 100 \quad (1).$

Or: $V_0 = U_0 - 100 \Rightarrow V_0 = -96$ et $U_n = V_n + 100$.

Ainsi: $(1) \iff V_{n+1} = (0,92\,[V_n + 100] + 8) - 100$

$\Rightarrow V_{n+1} = 0,92\,V_n$.

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,92$ et de premier terme $V_0 = -96$.

3. b. Exprimons (V_n) en fonction de n:

Comme $V_{n+1} = 0,92\,V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 \times (0,92)^n, \quad \text{avec:} \quad V_0 = -96.$$

3. c. Déduisons-en que pour tout entier naturel n, $U_n = 100 - 96 \times 0,92^n$:

Nous savons que: * $V_n = -96 \times (0,92)^n$

* $U_n = V_n + 100$.

D'où: $U_n = 100 - 96 \times 0,92^n$.

4. Résolvons l'inéquation $U_n > 70$*:

(* car: 70 000 correspond à 70 en milliers d'abonnés)

$U_n > 70 \iff 100 - 96 \times 0,92^n > 70$

$\iff -96 \times 0,92^n > -30$

$\iff 96 \times 0,92^n < 30$

$\iff 0,92^n < \dfrac{30}{96}$

$\iff 0,92^n < \dfrac{5}{16}$

$\iff n\ln(0,92) < \ln\left(\dfrac{5}{16}\right)$

$$\Longleftrightarrow \quad n > \frac{\ln\left(\frac{5}{16}\right)}{\ln(0,92)}, \quad \text{car:} \quad 0,92 \in \,]0, 1[, \quad \text{et donc:} \quad \ln(0,92) < 0$$

$$\Longrightarrow \quad n > 13,9497.$$

Nous prendrons $n = 14$ car n est un entier naturel.

Ainsi, 14 mois après le 1er janvier 2016, le nombre d'abonnés deviendra supérieur à 70 000.

En d'autres termes, le 1er mars 2017, le nombre d'abonnés deviendra supérieur à 70 000.