

# Corrigé

## Exercice 3



---

---

freemaths.fr

---

---

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2015

## MATHÉMATIQUES

- Série ES -

### ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

***Durée de l'épreuve : 3 heures***

***Coefficient : 7***

*Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,  
conformément à la réglementation en vigueur.*

*Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.  
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le  
texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.  
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète  
ou non fructueuse, qu'il aura développée.  
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements  
entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.*

### EXERCICE 3 (6 points)

*Commun à tous les candidats*

Dans une réserve naturelle, on étudie l'évolution de la population d'une race de singes en voie d'extinction à cause d'une maladie.

#### Partie A

Une étude sur cette population de singes a montré que leur nombre baisse de 15 % chaque année. Au 1<sup>er</sup> janvier 2004, la population était estimée à 25 000 singes.

À l'aide d'une suite, on modélise la population au 1<sup>er</sup> janvier de chaque année. Pour tout entier naturel  $n$ , le terme  $u_n$  de la suite représente le nombre de singes au 1<sup>er</sup> janvier de l'année 2004 +  $n$ . On a ainsi  $u_0 = 25\,000$ .

1) Calculer l'effectif de cette population de singes :

a) au 1<sup>er</sup> janvier 2005,

b) au 1<sup>er</sup> janvier 2006, en arrondissant à l'entier.

2) Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n = 25\,000 \times 0,85^n$ .

3) Suivant ce modèle, on souhaite savoir, à l'aide d'un algorithme, au bout de combien d'années après le 1<sup>er</sup> janvier 2004 le nombre de singes sera inférieur à 5 000.

Recopier et compléter les lignes L4, L5 et L6 de l'algorithme ci-dessous.

L1 : Variables	$u$ un réel, $n$ un entier
L2 : Initialisation	$u$ prend la valeur 25 000
L3 :	$n$ prend la valeur 0
L4 : Traitement	Tant que ..... faire
L5 :	$u$ prend la valeur .....
L6 :	$n$ prend la valeur .....
L7 :	Fin Tant que
L8 : Sortie	Afficher $n$

4) Montrer que la valeur de  $n$  affichée après l'exécution de l'algorithme est 10.

#### Partie B

Au 1<sup>er</sup> janvier 2014, une nouvelle étude a montré que la population de cette race de singes, dans la réserve naturelle, ne comptait plus que 5 000 individus. La maladie prenant de l'ampleur, on met en place un programme de soutien pour augmenter le nombre de naissances. À partir de cette date, on estime que, chaque année, un quart des singes disparaît et qu'il se produit 400 naissances.

On modélise la population de singes dans la réserve naturelle à l'aide d'une nouvelle suite. Pour tout entier naturel  $n$ , le terme  $v_n$  de la suite représente le nombre de singes au 1<sup>er</sup> janvier de l'année 2014 +  $n$ . On a ainsi  $v_0 = 5\,000$ .

1) a) Calculer  $v_1$  et  $v_2$ .

b) Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $v_{n+1} = 0,75 \times v_n + 400$ .

2) On considère la suite  $(w_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $w_n = v_n - 1\,600$ .

a) Montrer que  $(w_n)$  est une suite géométrique de raison 0,75. Préciser la valeur de  $w_0$ .

b) Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $w_n$  en fonction de  $n$ .

c) En déduire que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $v_n = 1\,600 + 3\,400 \times 0,75^n$ .

d) Calculer la limite de la suite  $(v_n)$  et interpréter ce résultat.

# EXERCICE 3

[ Amérique du Nord 2015 ]

## Partie A: Étude I sur les singes

1. a. Calculons l'effectif de cette population de singes au 1<sup>er</sup> janvier 2005:

Il s'agit de calculer  $U_1$ .

$$U_1 = (1 - 15\%) U_0 \Leftrightarrow U_1 = 0,85 \times 25000$$

$$\Rightarrow U_1 = 21250 \text{ singes.}$$

Ainsi, au 1<sup>er</sup> janvier 2005, il y aura: 21250 singes.

1. b. Calculons l'effectif de cette population de singes au 1<sup>er</sup> janvier 2006:

Il s'agit de calculer  $U_2$ .

$$U_2 = (1 - 15\%) U_1 \Leftrightarrow U_2 = 0,85 \times 21250$$

$$\Rightarrow U_2 = 18063 \text{ singes.}$$

Ainsi, au 1<sup>er</sup> janvier 2006, il y aura: 18063 singes.

2. Justifions que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n = 25000 \times (0,85)^n$ :

• D'après l'énoncé, au 1<sup>er</sup> janvier 2004, la population de singes est de: 25000.

D'où:  $U_0 = 25000$ .

• De plus, chaque année leur nombre baisse de 15%.

Ainsi, pour tout entier naturel  $n$ , le nombre " $U_{n+1}$ " de singes est égal au nombre " $U_n$ " de singes diminué de 15%.

Donc pour tout entier naturel  $n$ :

$$U_{n+1} = U_n - 15\% U_n \Leftrightarrow U_{n+1} = 0,85 U_n$$

Ou encore:  $U_n = U_0 \times (0,85)^n \Rightarrow U_n = 25000 \times (0,85)^n$ .

Nous sommes donc en présence d'une suite géométrique de raison  $q = 0,85$  et de premier terme  $U_0 = 25000$ .

### 3. Recopions et complétons les lignes $L_4$ , $L_5$ et $L_6$ :

Les lignes  $L_4$ ,  $L_5$  et  $L_6$  complétées sont les suivantes:

- $L_4$ : Traitement Tant que  $u \geq 5000$  faire
- $L_5$ :  $u$  prend la valeur  $u \times 0,85$
- $L_6$ :  $n$  prend la valeur  $n + 1$

### 4. Montrons que la valeur de $n$ est 10:

Au bout de combien d'années, après le 1<sup>er</sup> janvier 2004, le nombre de singes sera-t-il inférieur à 5000 ?

Répondre à cette question revient à résoudre l'inéquation:  $U_n \leq 5000$ .

$$U_n \leq 5000 \Leftrightarrow 25000 \times (0,85)^n \leq 5000$$

$$\Leftrightarrow (0,85)^n \leq 0,2$$

$$\Leftrightarrow n \times \ln(0,85) \leq \ln(0,2)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,85)} \quad \text{car: } 0,85 \in ]0, 1[, \text{ et donc: } \ln(0,85) < 0$$

$$\Rightarrow n \geq 9,903.$$

Nous prendrons  $n = 10$  ans car  $n$  est un entier naturel.

Cela signifie qu'à partir de 2014, cad 10 ans à compter du 1<sup>er</sup> janvier 2004, le nombre de singes sera inférieur à 5000.

## Partie B: Étude II sur les singes

I. a. Calculons  $V_1$  et  $V_2$ :

$$\begin{aligned} \bullet V_1 &= (1 - 25\%) V_0 + 400 \iff V_1 = 0,75 \times 5000 + 400 \\ &\implies V_1 = 4150 \text{ singes.} \end{aligned}$$

Ainsi, au 1<sup>er</sup> janvier 2015, il y aura: 4150 singes.

$$\begin{aligned} \bullet V_2 &= (1 - 25\%) V_1 + 400 \iff V_2 = 0,75 \times 4150 + 400 \\ &\implies V_2 = 3513 \text{ singes.} \end{aligned}$$

Ainsi, au 1<sup>er</sup> janvier 2016, il y aura: 3513 singes.

I. b. Justifions que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $V_{n+1} = 0,75 V_n + 400$ :

• D'après l'énoncé, au 1<sup>er</sup> janvier 2014, la population de singes est de: 5000.

D'où:  $V_0 = 5000$ .

• De plus, chaque année leur nombre baisse de 25% et il se produit 400 nouvelles naissances.

Soient: •  $V_{n+1}$ , le nombre de singes au 1<sup>er</sup> janvier (2014 + (n + 1)),  
•  $V_n$ , le nombre de singes au 1<sup>er</sup> janvier (2014 + (n)).

Pour tout entier naturel  $n$ , le nombre  $V_{n+1}$  de singes est égal au nombre  $V_n$  de singes diminué de 25% et augmenté de 400 " nouvelles naissances ".

Donc pour tout entier naturel  $n$ :

$$V_{n+1} = V_n - 25\% V_n + 400 \iff V_{n+1} = 0,75 V_n + 400.$$

2. a. Montrons que  $(W_n)$  est géométrique et déterminons  $W_0$  et  $q$ :

$$\begin{aligned} W_n = V_n - 1600 &\Leftrightarrow W_{n+1} = V_{n+1} - 1600 \\ &\Leftrightarrow W_{n+1} = (0,75V_n + 400) - 1600 \quad (1). \end{aligned}$$

$$\text{Or: } W_0 = V_0 - 1600 \Rightarrow W_0 = 3400 \quad \text{et} \quad V_n = W_n + 1600.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } (1) &\Leftrightarrow W_{n+1} = (0,75[W_n + 1600] + 400) - 1600 \\ &\Rightarrow W_{n+1} = 0,75W_n. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $(W_n)$  est bien une suite géométrique de raison  $q = 0,75$  et de premier terme  $W_0 = 3400$ .

2. b. Exprimons  $W_n$  en fonction de  $n$ :

Comme  $W_{n+1} = 0,75W_n$ , d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$W_n = W_0 \times (0,75)^n, \quad \text{avec: } W_0 = 3400.$$

2. c. Déduisons-en que pour tout entier naturel  $n$ ,  $V_n = 1600 + 3400 \times (0,75)^n$ :

$$\text{Nous savons que: } * W_n = 3400 \times (0,75)^n$$

$$* V_n = W_n + 1600.$$

$$\text{D'où: } V_n = 1600 + 3400 \times (0,75)^n.$$

2. d. Calculons la limite de  $(V_n)$  et interprétons:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 1600 + 3400 \times (0,75)^n \\ &= 1600 \quad \text{car: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,75)^n = 0, \quad \text{car: } 0,75 \in ]-1, 1[. \end{aligned}$$

Donc: • La suite  $(V_n)$  est convergente et converge vers 1600.

- Au bout de  $n$  années (" $n$ " très grand), la population de singes tendra vers 1600 individus.