Corrigé

Exercice 3

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2015

MATHÉMATIQUES
- Série ES -

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES
- Série L -

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 4

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

Dans une réserve naturelle, on étudie l'évolution de la population d'une race de singes en voie d'extinction à cause d'une maladie.

Partie A

Une étude sur cette population de singes a montré que leur nombre baisse de 15 % chaque année. Au 1er janvier 2004, la population était estimée à 25 000 singes.
À l'aide d'une suite, on modélise la population au 1er janvier de chaque année. Pour tout entier naturel n, le terme u_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année $2004 + n$. On a ainsi $u_0 = 25\,000$.

1) Calculer l'effectif de cette population de singes :

a) au 1er janvier 2005,

b) au 1er janvier 2006, en arrondissant à l'entier.

2) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 25\,000 \times 0{,}85^n$.

3) Suivant ce modèle, on souhaite savoir, à l'aide d'un algorithme, au bout de combien d'années après le 1er janvier 2004 le nombre de singes sera inférieur à 5 000.
Recopier et compléter les lignes L4, L5 et L6 de l'algorithme ci-dessous.

```
L1 : Variables         u un réel, n un entier
L2 : Initialisation    u prend la valeur 25 000
L3 :                   n prend la valeur 0
L4 : Traitement        Tant que ……………….. faire
L5 :                           u prend la valeur …………..
L6 :                           n prend la valeur …………
L7 :                   Fin Tant que
L8 : Sortie            Afficher n
```

4) Montrer que la valeur de n affichée après l'exécution de l'algorithme est 10.

Partie B

Au 1er janvier 2014, une nouvelle étude a montré que la population de cette race de singes, dans la réserve naturelle, ne comptait plus que 5 000 individus. La maladie prenant de l'ampleur, on met en place un programme de soutien pour augmenter le nombre de naissances. À partir de cette date, on estime que, chaque année, un quart des singes disparaît et qu'il se produit 400 naissances.
On modélise la population de singes dans la réserve naturelle à l'aide d'une nouvelle suite. Pour tout entier naturel n, le terme v_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année $2014 + n$. On a ainsi $v_0 = 5\,000$.

1) a) Calculer v_1 et v_2.

b) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 0{,}75 \times v_n + 400$.

2) On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 1\,600$.

a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison 0,75. Préciser la valeur de w_0.

b) Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.

c) En déduire que pour tout entier naturel n, on a $v_n = 1\,600 + 3\,400 \times 0{,}75^n$.

d) Calculer la limite de la suite (v_n) et interpréter ce résultat.

EXERCICE 3

[Amérique du Nord 2015]

Partie A: Étude 1 sur les singes

1. a. Calculons l'effectif de cette population de singes au 1er janvier 2005:

Il s'agit de calculer U_1.

$U_1 = (1 - 15\%)\, U_0 \iff U_1 = 0,85 \times 25000$

$\Rightarrow U_1 = 21250$ singes.

Ainsi, au 1er janvier 2005, il y aura: 21250 singes.

1. b. Calculons l'effectif de cette population de singes au 1er janvier 2006:

Il s'agit de calculer U_2.

$U_2 = (1 - 15\%)\, U_1 \iff U_2 = 0,85 \times 21250$

$\Rightarrow U_2 = 18063$ singes.

Ainsi, au 1er janvier 2006, il y aura: 18063 singes.

2. Justifions que, pour tout entier naturel n, $U_n = 25000 \times (0,85)^n$:

- D'après l'énoncé, au 1er janvier 2004, la population de singes est de: 25000.

D'où: $U_0 = 25000$.

- De plus, chaque année leur nombre baisse de 15%.

Ainsi, pour tout entier naturel n, le nombre " U_{n+1} " de singes est égal au nombre " U_n " de singes diminué de 15%.

Donc pour tout entier naturel n:

$U_{n+1} = U_n - 15\%\ U_n$ <=> $U_{n+1} = 0,85\ U_n$.

Ou encore: $U_n = U_0 \times (0,85)^n$ => $U_n = 25000 \times (0,85)^n$.

Nous sommes donc en présence d'une suite géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $U_0 = 25000$.

3. Recopions et complétons les lignes L_4, L_5 et L_6:

Les lignes L_4, L_5 et L_6 complétées sont les suivantes:

- L_4: Traitement Tant que $u \geqslant 5000$ faire
- L_5: u prend la valeur $u \times 0,85$
- L_6: n prend la valeur $n + 1$

4. Montrons que la valeur de n est 10:

Au bout de combien d'années, après le 1er janvier 2004, le nombre de singes sera-t-il inférieur à 5000 ?

Répondre à cette question revient à résoudre l'inéquation: $U_n \leqslant 5000$.

$U_n \leqslant 5000$ <=> $25000 \times (0,85)^n \leqslant 5000$

<=> $(0,85)^n \leqslant 0,2$

<=> $n \times \ln(0,85) \leqslant \ln(0,2)$

<=> $n \geqslant \dfrac{\ln(0,2)}{\ln(0,85)}$ car: $0,85 \in]0,1[$, et donc: $\ln(0,85) < 0$

=> $n \geqslant 9,903$.

Nous prendrons $n = 10$ ans car n est un entier naturel.

Cela signifie qu'à partir de 2014, cad 10 ans à compter du 1er janvier 2004, le nombre de singes sera inférieur à 5000.

Partie B: Étude II sur les singes

1. a. Calculons V_1 et V_2:

- $V_1 = (1 - 25\%)\ V_0 + 400 \iff V_1 = 0,75 \times 5000 + 400$

  $\Rightarrow V_1 = 4\,150$ singes.

Ainsi, au 1er janvier 2015, il y aura: 4 150 singes.

- $V_2 = (1 - 25\%)\ V_1 + 400 \iff V_2 = 0,75 \times 4\,150 + 400$

  $\Rightarrow V_2 = 3\,513$ singes.

Ainsi, au 1er janvier 2016, il y aura: 3 513 singes.

1. b. Justifions que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = 0,75\ V_n + 400$:

- D'après l'énoncé, au 1er janvier 2014, la population de singes est de: 5000.

D'où: $V_0 = 5000$.

- De plus, chaque année leur nombre baisse de 25% et il se produit 400 nouvelles naissances.

Soient: • V_{n+1}, le nombre de singes au 1er janvier (2014 + (n + 1)),

• V_n, le nombre de singes au 1er janvier (2014 + (n)).

Pour tout entier naturel n, le nombre V_{n+1} de singes est égal au nombre V_n de singes diminué de 25% et augmenté de 400 " nouvelles naissances ".

Donc pour tout entier naturel n:

$V_{n+1} = V_n - 25\%\ V_n + 400 \iff V_{n+1} = 0,75\ V_n + 400$.

2. a. Montrons que (W_n) est géométrique et déterminons W_0 et q:

$W_n = V_n - 1600 \iff W_{n+1} = V_{n+1} - 1600$

$\iff W_{n+1} = (0,75\,V_n + 400) - 1600 \quad (1).$

Or: $W_0 = V_0 - 1600 \Rightarrow W_0 = 3\,400$ et $V_n = W_n + 1600.$

Ainsi: $(1) \iff W_{n+1} = (0,75\,[W_n + 1600] + 400) - 1600$

$\Rightarrow W_{n+1} = 0,75\,W_n.$

Par conséquent, (W_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme $W_0 = 3\,400.$

2. b. Exprimons W_n en fonction de n:

Comme $W_{n+1} = 0,75\,W_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$W_n = W_0 \times (0,75)^n, \quad \text{avec:} \quad W_0 = 3\,400.$$

2. c. Déduisons-en que pour tout entier naturel n, $V_n = 1600 + 3\,400 \times (0,75)^n$:

Nous savons que: * $W_n = 3\,400 \times (0,75)^n$

* $V_n = W_n + 1600.$

D'où: $V_n = 1600 + 3\,400 \times (0,75)^n.$

2. d. Calculons la limite de (V_n) et interprétons:

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} 1600 + 3\,400 \times (0,75)^n$$

$$= 1600 \quad \text{car:} \quad \lim_{n\to+\infty} (0,75)^n = 0, \quad \text{car:} \quad 0,75 \in\,]-1, 1[.$$

Donc:
- La suite (V_n) est convergente et converge vers 1600.
- Au bout de n années (" n " très grand), la population de singes tendra vers 1600 individus.