EXERCICE 3

[Amérique du Nord 2015]

Partie A : Étude 1 sur les singes

1. a. Calculons l'effectif de cette population de singes au 1er janvier 2005 :

Il s'agit de calculer U_1.

$U_1 = (1 - 15\%)\ U_0 \iff U_1 = 0,85 \times 25000$

$\Rightarrow U_1 = 21250$ singes.

Ainsi, au 1er janvier 2005, il y aura : 21250 singes.

1. b. Calculons l'effectif de cette population de singes au 1er janvier 2006 :

Il s'agit de calculer U_2.

$U_2 = (1 - 15\%)\ U_1 \iff U_2 = 0,85 \times 21250$

$\Rightarrow U_2 = 18063$ singes.

Ainsi, au 1er janvier 2006, il y aura : 18063 singes.

2. Justifions que, pour tout entier naturel n, $U_n = 25000 \times (0,85)^n$:

• D'après l'énoncé, au 1er janvier 2004, la population de singes est de : 25000.

D'où : $U_0 = 25000$.

• De plus, chaque année leur nombre baisse de 15%.

Ainsi, pour tout entier naturel n, le nombre " U_{n+1} " de singes est égal au nombre " U_n " de singes diminué de 15%.

Donc pour tout entier naturel n:

$U_{n+1} = U_n - 15\% \, U_n \iff U_{n+1} = 0,85 \, U_n$.

Ou encore: $U_n = U_0 \times (0,85)^n \Rightarrow U_n = 25000 \times (0,85)^n$.

Nous sommes donc en présence d'une suite géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $U_0 = 25000$.

3. Recopions et complétons les lignes L_4, L_5 et L_6:

Les lignes L_4, L_5 et L_6 complétées sont les suivantes:

- L_4: Traitement Tant que $u \geqslant 5000$ faire
- L_5: u prend la valeur $u \times 0,85$
- L_6: n prend la valeur $n + 1$

4. Montrons que la valeur de n est 10:

Au bout de combien d'années, après le 1er janvier 2004, le nombre de singes sera-t-il inférieur à 5000 ?

Répondre à cette question revient à résoudre l'inéquation: $U_n \leqslant 5000$.

$$U_n \leqslant 5000 \iff 25000 \times (0,85)^n \leqslant 5000$$

$$\iff (0,85)^n \leqslant 0,2$$

$$\iff n \times \ln(0,85) \leqslant \ln(0,2)$$

$$\iff n \geqslant \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,85)} \quad \text{car: } 0,85 \in]0,1[, \text{ et donc: } \ln(0,85) < 0$$

$$\Rightarrow n \geqslant 9,903.$$

Nous prendrons $n = 10$ ans car n est un entier naturel.

Cela signifie qu'à partir de 2014, cad 10 ans à compter du 1er janvier 2004, le nombre de singes sera inférieur à 5000.

Partie B: Étude II sur les singes

1. a. Calculons V_1 et V_2:

- $V_1 = (1 - 25\%)\ V_0 + 400 \iff V_1 = 0,75 \times 5000 + 400$

  $\Rightarrow V_1 = 4\,150$ singes.

Ainsi, au 1er janvier 2015, il y aura: 4 150 singes.

- $V_2 = (1 - 25\%)\ V_1 + 400 \iff V_2 = 0,75 \times 4\,150 + 400$

  $\Rightarrow V_2 = 3\,513$ singes.

Ainsi, au 1er janvier 2016, il y aura: 3 513 singes.

1. b. Justifions que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = 0,75\ V_n + 400$:

- D'après l'énoncé, au 1er janvier 2014, la population de singes est de: 5000.

D'où: $V_0 = 5000$.

- De plus, chaque année leur nombre baisse de 25% et il se produit 400 nouvelles naissances.

Soient:
- V_{n+1}, le nombre de singes au 1er janvier (2014 + (n + 1)),
- V_n, le nombre de singes au 1er janvier (2014 + (n)).

Pour tout entier naturel n, le nombre V_{n+1} de singes est égal au nombre V_n de singes diminué de 25% et augmenté de 400 " nouvelles naissances ".

Donc pour tout entier naturel n:

$V_{n+1} = V_n - 25\%\ V_n + 400 \iff V_{n+1} = 0,75\ V_n + 400$.

2. a. Montrons que (W_n) est géométrique et déterminons W_0 et q:

$W_n = V_n - 1600 \iff W_{n+1} = V_{n+1} - 1600$

$\iff W_{n+1} = (0,75 V_n + 400) - 1600 \quad (1).$

Or: $W_0 = V_0 - 1600 \Rightarrow W_0 = 3\,400$ et $V_n = W_n + 1600.$

Ainsi: $(1) \iff W_{n+1} = (0,75\,[W_n + 1600] + 400) - 1600$

$\Rightarrow W_{n+1} = 0,75\, W_n.$

Par conséquent, (W_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme $W_0 = 3\,400.$

2. b. Exprimons W_n en fonction de n:

Comme $W_{n+1} = 0,75\, W_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$W_n = W_0 \times (0,75)^n$, avec: $W_0 = 3\,400.$

2. c. Déduisons-en que pour tout entier naturel n, $V_n = 1600 + 3\,400 \times (0,75)^n$:

Nous savons que: * $W_n = 3\,400 \times (0,75)^n$

* $V_n = W_n + 1600.$

D'où: $V_n = 1600 + 3\,400 \times (0,75)^n.$

2. d. Calculons la limite de (V_n) et interprétons:

$\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 1600 + 3\,400 \times (0,75)^n$

$= 1600$ car: $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,75)^n = 0$, car: $0,75 \in \,]-1, 1[.$

Donc: • La suite (V_n) est convergente et converge vers 1600.

• Au bout de n années (" n " très grand), la population de singes tendra vers 1600 individus.