CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SUJET • Session de 2003

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Classes de terminale S

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2003

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 heures

La calculatrice de poche est autorisée.
La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Le problème comporte deux questions préliminaires dont les résultats sont utiles tout au long du problème, et cinq parties ; les quatre premières sont très largement indépendantes les unes des autres. Il n'est donc pas obligatoire de traiter systématiquement les questions dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement la question traitée en respectant l'indexation du texte.

De même, pour poursuivre, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le problème étudie des configurations du plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On pourra aussi se placer dans le plan complexe associé, i *étant l'affixe du point de coordonnées* $(0, 1)$.

*On appelle **triangle** tout ensemble de **trois points non alignés** du plan.*

Questions préliminaires

1. Soit ABC un triangle et M un point quelconque du plan. Montrer que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

En déduire que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes en un point H appelé ***orthocentre*** de ce triangle.

2. Soit ABC un triangle, Ω le centre de son cercle circonscrit et H le point tel que $\overrightarrow{\Omega H} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}$. Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

Étant donnée une partie X du plan, supposée non incluse dans une droite, on note $\mathcal{H}(X)$ l'ensemble des orthocentres des triangles dont les sommets appartiennent à X.

*On dira qu'une partie X du plan est **orthocentrique** si elle n'est pas incluse dans une droite et si $\mathcal{H}(X)$ est inclus dans X, c'est-à-dire si tout orthocentre d'un triangle de points de X appartient à X.*

Première partie

1. Déterminer les parties orthocentriques à 3 éléments.

2. Déterminer les parties orthocentriques à 4 éléments.

3. Soit X un ensemble de quatre points d'un cercle et $Y = \mathcal{H}(X)$.

a) Montrer que Y se déduit de X par une transformation simple.

b) Déterminer $\mathcal{H}(Y)$.

4. a) Soit Γ un cercle de rayon strictement positif ; déterminer $\mathcal{H}(\Gamma)$.

b) Soit D un disque de rayon strictement positif ; déterminer $\mathcal{H}(D)$.

Deuxième partie

Dans cette partie, R est un nombre réel strictement positif, n est un entier au moins égal à 2 et X est l'ensemble des $2n$ sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon R.

On considère l'ensemble $\mathcal{T}$ des triangles dont les sommets appartiennent à X. On choisit au hasard, avec équiprobabilité, un élément de $\mathcal{T}$.

1. Quelle est la probabilité de choisir un triangle rectangle ?

2. Quelle est la probabilité de choisir un triangle dont les trois angles sont aigus ?

3. On note L la variable aléatoire qui à tout élément de $\mathcal{T}$ associe le carré de la distance de O à son orthocentre. Déterminer, en fonction de n et R, l'espérance de la variable aléatoire L.

Troisième partie

1. Soit a, b, c trois réels tels que $a(b - c) \neq 0$ et A, B, C les points de coordonnées respectives $(0, a)$, $(b, 0)$, $(c, 0)$. Calculer les coordonnées de l'orthocentre D du triangle ABC.

2. Soit X la partie obtenue en prenant la réunion d'une droite Δ et d'un point M n'appartenant pas à Δ. Déterminer $\mathcal{H}(X)$. Montrer que $\mathcal{H}(X) \cup X$ est une partie orthocentrique.

3. Soit X une partie orthocentrique incluse dans la réunion des axes $(O, \vec{u})$ et $(O, \vec{v})$ et contenant au moins trois points de $(O, \vec{u})$ distincts de O.

a) Montrer que X contient au moins trois points de $(O, \vec{u})$ d'abscisses non nulles et de même signe.

b) Montrer que X contient au moins trois points de $(O, \vec{u})$ d'abscisses strictement positives.

4. a) Déterminer les parties orthocentriques finies, contenant au plus cinq points et incluses dans la réunion des axes $(O, \vec{u})$ et $(O, \vec{v})$.

b) Soit X une partie orthocentrique incluse dans la réunion des axes $(O, \vec{u})$ et $(O, \vec{v})$ et contenant au moins six points. Montrer qu'il existe deux suites (x_n) et (x'_n) de réels non nuls telles que, pour tout entier n, les points de coordonnées $(x_n, 0)$ et $(x'_n, 0)$ appartiennent à X, et telles que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} x'_n = 0.$$

Une partie orthocentrique incluse dans la réunion des axes $(O, \vec{u})$ et $(O, \vec{v})$ et contenant au moins six points peut-elle être finie ?

Quatrième partie

L'objectif de cette partie est la construction de parties orthocentriques remarquables.

1. Soit k un réel non nul et soit Y l'hyperbole d'équation $xy = k$.

a) Soit A, B, C, D quatre points distincts de Y, d'abscisses respectives a, b, c, d. Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux si et seulement si $abcd = -k^2$.

b) Soit A, B, C trois points distincts de Y, d'abscisses respectives a, b, c. Déterminer l'orthocentre de ABC.

c) Montrer que Y est orthocentrique.

Dans toute la suite de la quatrième partie, on considère un entier relatif non nul q et on note X l'ensemble d'équation $x^2 + qxy - y^2 = 1$.

2. a) Montrer que l'équation $t^2 - qt - 1$ possède deux racines réelles distinctes. Montrer que ces racines sont irrationnelles.

Dans toute la suite de la quatrième partie, on note r et r' ces deux racines et s la similitude définie par la représentation complexe $z \mapsto (1 - r\mathrm{i})z$.

b) Montrer que $s(X)$ est une hyperbole, d'équation $xy = k$, où k est un réel à déterminer. En déduire que X est un ensemble orthocentrique.

3. Soit G l'ensemble des points de X à coordonnées entières et Γ l'ensemble des abscisses des éléments de $s(G)$.

a) Vérifier que Γ est l'ensemble des nombres réels de la forme $x + ry$, où x et y sont deux entiers tels que $(x + ry)(x + r'y) = 1$.

b) Montrer que $-1 \in \Gamma$; montrer que $r^2 \in \Gamma$.

c) Montrer que le produit de deux éléments de Γ est élément de Γ et que l'inverse d'un élément de Γ est élément de Γ. Montrer que Γ possède une infinité d'éléments.

4. Déduire de ce qui précède que l'ensemble G des points à coordonnées entières de X est une partie orthocentrique infinie.

Cinquième partie

On note Y_1 l'hyperbole d'équation $xy = 1$ et Y_0 l'ensemble d'équation $xy = 0$, c'est-à-dire la réunion des axes $(O, \vec{u})$ et $(O, \vec{v})$.

On admet le résultat suivant :
« *Étant donnés quatre points A, B, C et D du plan, il existe une similitude s telle que $s(A), s(B), s(C)$ et $s(D)$ appartiennent tous à Y_1 ou bien appartiennent tous à Y_0* ».

Soit A_0, B_0, C_0 et D_0 quatre points, trois à trois non alignés, et soit $X_0 = \{A_0, B_0, C_0, D_0\}$.
On définit par récurrence $X_{n+1} = \mathcal{H}(X_n)$ pour tout entier naturel n. On suppose qu'il existe un entier n strictement positif tel que $X_n = X_0$ et on note m le plus petit entier ayant cette propriété.

1. Montrer que $m = 1$ ou $m = 2$.

2. Déterminer les ensembles X_0 tels que $m = 1$, puis ceux tels que $m = 2$.

* * *
*