COMPOSITION MATHÉMATIQUES
CONCOURS GÉNÉRAL

CORRECTION, Session 2023

Concours Général Maths 2023 : Correction

Auteur du document : Gilbert JULIA, professeur agrégé honoraire
Ancien préparateur au concours du CAPES de Mathématiques

Comme chaque année, la cuvée 2023 du Concours Général nous propose des thèmes intéressants et variés. Avec notamment l'étude d'une étonnante suite millésimée. Rendons hommage aux auteurs du sujet.

Exercice 1 : Soyons rationnels !

1. $v(1) = v(3) = 0$; $v(2) = 1$; $v(4) = 2$

2. Si *n* est un nombre entier impair, il est premier avec 2, donc il est premier avec toute puissance de 2 ; aucune puissance strictement positive de 2 ne le divise. Dans ce cas : $v(n) = 0$.

Si *n* est un nombre pair, soit *m* l'entier $m = \frac{n}{2}$.

Quel que soit l'entier *j* : 2^j divise *m* si et seulement si 2^{j+1} divise $2m = n$.

En conséquence : $v(n) = \max_{j \text{ divise } n} 2^j = 2 \times \max_{j \text{ divise } m} 2^j = 2 \times v\left(\frac{n}{2}\right)$.

3. Avec TI-Nspire CAS, calcul des 16, puis des 32 premiers termes des suites *u* et *v*.

On vérifie au passage qu'en effet $u(8) = 4$.

suitev(16)

$\{0,1,0,2,0,1,0,3,0,1,0,2,0,1,0,4\}$

$\left\{1,2,\frac{1}{2},3,\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{1}{3},4,\frac{3}{4},\frac{5}{3},\frac{2}{5},\frac{5}{2},\frac{3}{5},\frac{4}{3},\frac{1}{4},5\right\}$

Terminé

suitev(32)

$\{0,1,0,2,0,1,0,3,0,1,0,2,0,1,0,4,0,1,0,2,0,1,0,3,0,1,0,2,0,1,0,5\}$

$\left\{1,2,\frac{1}{2},3,\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{1}{3},4,\frac{3}{4},\frac{5}{3},\frac{2}{5},\frac{5}{2},\frac{3}{5},\frac{4}{3},\frac{1}{4},5,\frac{4}{5},\frac{7}{4},\frac{3}{7},\frac{8}{3},\frac{5}{8},\frac{7}{5},\frac{2}{7},\frac{7}{2},\frac{5}{7},\frac{8}{5},\frac{3}{8},\frac{7}{3},\frac{4}{7},\frac{5}{4},\frac{1}{5},6\right\}$

Terminé

```
Define suitev(n)=
Prgm
newList(n)→v
0→v[1]
For i,2,n
  If mod(i,2)=1 Then
    0→v[i]
  Else
    v[i/2]+1→v[i]
  EndIf
EndFor
Disp v
newList(n)→u
1→u[1]
For i,2,n
  If u[i-1]=0 Then
   0→u[i]
  Else
    1+2·v[i]-1/u[i-1]→u[i]
  EndIf
EndFor
Disp u
EndPrgm
```


4. Montrons d'abord par récurrence sur *n* la propriété $\wp_n$: « $u_{2n} = u_n + 1$ et $u_{2n+1} = \frac{u_n}{u_n+1}$ ».

Initialisation : $u_2 = 2 = u_1 + 1$ et $u_3 = \frac{1}{2} = \frac{u_1}{u_1+1}$, ce qui montre que $\wp_1$ est vérifiée.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier *n*, les relations $u_{2n} = u_n + 1$ et $u_{2n+1} = \frac{u_n}{u_n+1}$ soient vérifiées.

Etudions ce qu'il se passe aux rangs $(2n+2) = 2 \times (n+1)$ et $(2n+3) = 2 \times (n+1) + 1$:

Rang $(2n+2)$: $u_{2n+2} = 1 + 2v(2n+2) - \frac{1}{u_{2n+1}} = 1 + 2(v(n+1)+1) - \frac{u_n+1}{u_n} = 2 + 2v(n+1) - \frac{1}{u_n}$.

Nous obtenons : $u_{2n+2} = 1 + \left(1 + 2v(n+1) - \frac{1}{u_n}\right) = 1 + u_{n+1}$

Rang $(2n+3)$: $u_{2n+3} = 1 + 2v(2n+3) - \frac{1}{u_{2n+2}} = 1 + 2 \times 0 - \frac{1}{1+u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{1+u_{n+1}}$.

Si $\wp_n$ est vérifiée, alors $\wp_{n+1}$ l'est aussi, la propriété $\wp_n$ est héréditaire.

Etant initialisée au rang 1 et héréditaire, cette propriété $\wp_n$ est vérifiée pour tout entier $n \geq 1$.

Montrons maintenant par récurrence que tous les termes de la suite sont strictement positifs :

Pour cela, considérons la propriété $\wp_k$ dépendant de l'entier *k* :

« Pour tout indice *j* tel que $2^k \leq j < 2^{k+1}$, l'inégalité $u_j > 0$ est vérifiée »

Initialisation : La propriété $\wp_0$ est vérifiée puisque le seul indice concerné est l'indice $j = 2^0 = 1$ pour lequel $u_1 = 1 > 0$.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier *k*, la propriété $\wp_k$ soit vérifiée. C'est-à-dire supposons que pour tout indice *j* tel que $2^k \leq j < 2^{k+1}$, l'inégalité $u_j > 0$ soit vérifiée. Alors :

$u_j > 0 \implies \begin{cases} u_{2j} = u_j + 1 > 0 \\ u_{2j+1} = \frac{u_j}{u_j+1} > 0 \end{cases}$. Lorsque *j* décrit l'ensemble $\{2^k, 2^k+1, \dots, 2^{k+1}-1\}$, l'entier $2j$ décrit tous les indices pairs de l'ensemble $\{2^{k+1}, 2^k+1, \dots, 2^{k+2}-1\}$ et l'entier $2j+1$ en décrit tous les indices impairs. Ainsi : $\wp_k \implies \wp_{k+1}$. La propriété $\wp_k$ est héréditaire. La propriété $\wp_k$ est vérifiée pour tout entier naturel *k*, ce qui démontre que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ sont strictement positifs.

NB. Démontrons brièvement au passage un lemme qui nous sera utile dans la question 5.

L'entier *n* étant fixé, pour tout entier naturel *k* :

- D'une part : $u_{2^k n} = u_n + k$ (relation obtenue en itérant la relation de duplication)
- D'autre part (relation $\mathcal{R}_k$ que nous démontrerons par récurrence) :

$$u_{2^{k-1}n+(2^{k-1}-1)} = \frac{u_n}{k \times u_n + 1}$$

Initialisation : $\mathcal{R}_k$ est vérifiée pour $k = 0$ et $k = 1$.

Hérédité : Supposons $\mathcal{R}_k$ vérifiée à un certain rang *k*.

Utilisons une relation de la **question 4** avec $N = 2^{k-1}n + (2^{k-1} - 1)$:

$$u_{2N+1} = \frac{u_N}{u_N + 1} = \frac{\frac{u_n}{k \times u_n + 1}}{\frac{u_n}{k \times u_n + 1} + 1} = \frac{u_n}{(k+1) \times u_n + 1}$$

Or : $2N + 1 = 2 \times \left(2^{k-1}n + (2^{k-1} - 1)\right) + 1 = 2^k n + (2^k - 1)$, ce qui montre que, si $\mathcal{R}_k$ est vérifiée, alors $\mathcal{R}_{k+1}$ l'est aussi. $\mathcal{R}_k$ est héréditaire.

$\mathcal{R}_k$ est donc vérifiée pour tout entier naturel *k*.

5. Etudions d''abord deux cas particuliers.

Cas des entiers.

La relation de récurrence $u_{2n} = u_n + 1$ montre que la suite $(u_{2^k})_{k \geq 0}$ constituée par les termes dont les index sont des puissances de 2 est une suite arithmétique de raison 1. Son premier terme est $u_1 = 1$.

Nous pouvons en déduire que pour tout entier naturel *k* : $u_{2^k} = k + 1$.

Tous les entiers strictement positifs sont des termes de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

Cas des inverses d'entiers.

Pour tout entier $k \geq 1$: $u_{2^k} = k + 1 = 1 + 2v(2^k) - \frac{1}{u_{2^k - 1}} = 1 + 2k - \frac{1}{u_{2^k - 1}}$ d'où nous déduisons :

$-k = -\frac{1}{u_{2^k - 1}}$ soit : $u_{2^k - 1} = \frac{1}{k}$.

Les termes d'indices précédant ceux qui sont des puissances de 2 sont les inverses d'entiers.

Généralisons maintenant aux rationnels non entiers $\frac{a}{b}$.

Remarquons d'abord que, pour un entier $b > 1$ fixé, si tous les rationnels de $\left\{\frac{1}{b}\ ;\ \frac{2}{b}\ ;\ \dots\ ;\ \frac{b-1}{b}\right\}$ sont des termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, alors il en est de même de tous les rationnels de la forme $\frac{a}{b}$ quel que soit l'entier $a > 0$.

En effet, soit $a = kb + r$ la division euclidienne de *a* par *b* (avec $0 \leq r < b$). Alors : $a = k + \frac{r}{b}$.

Soit $n(r)$ l'indice pour lequel $u_{n(r)} = \frac{r}{b}$. D'après le lemme évoqué en **question 4**, $u_{2^k \times n(r)} = k + \frac{r}{b} = \frac{a}{b}$.

Montrons maintenant par récurrence forte sur l'entier b la propriété $\wp_b$: « Tous les rationnels de $\left\{\frac{1}{b}\ ;\ \frac{2}{b}\ ;\ \dots\ ;\ \frac{b-1}{b}\right\}$ sont des termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ ».

Initialisation : L'examen des huit premiers termes montre que les rationnels $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$ sont des termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$. Les propriétés $\wp_1$ et $\wp_2$ sont vérifiées.

Hérédité : Supposons que la propriété $\wp_j$ soit vérifiée jusqu'à un certain entier *b*.

Soit $\frac{p}{b+1}$ un rationnel de l'ensemble $\left\{\frac{1}{b+1}\ ;\ \frac{2}{b+1}\ ;\ \dots\ ;\ \frac{b}{b+1}\right\}$.

Ecrivons la division euclidienne de $(b+1)$ par *p* : $b + 1 = k \times p + r$ avec $0 \leq r < p \leq b$

Si $r = 0$, $\frac{p}{b+1}$ est un inverse d'entier, nous avons vu qu'il s'agissait d'un terme de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$. Sinon :

$$\frac{p}{b+1} = \frac{p}{k \times p + r} = \frac{\frac{p}{r}}{k\frac{p}{r} + 1}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $\frac{p}{r}$ est un terme de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ puisque son dénominateur est $\leq b$.

D'après le lemme évoqué en **question 4**, $\frac{p}{b+1} = \frac{\frac{p}{r}}{k\frac{p}{r}+1}$ en est un autre.

Il en résulte que tous les rationnels de l'ensemble $\left\{\frac{1}{b+1}\ ;\ \frac{2}{b+1}\ ;\ \dots\ ;\ \frac{b}{b+1}\right\}$ sont eux-aussi des termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ et cette propriété implique que tous les rationnels de dénominateur $(b+1)$ sont des termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ quel que soit leur numérateur.

Si $\wp_j$ est vérifiée jusqu'à un certain rang *b*, elle est vérifiée jusqu'au rang $(b+1)$.

Elle est donc universellement vérifiée.

Tous les rationnels strictement positifs sont des termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

6. Montrons d'abord que u_1 est le seul terme de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ qui est égal à 1.

Supposons qu'il en existe un autre, d'indice > 1.

- Il ne peut pas être d'indice impair $2n+1$ (avec $n>0$) , car la relation $\frac{u_n}{u_n+1} = u_{2n+1} = 1$ est impossible.
- Il ne peut pas non plus être d'indice pair $2n$ (avec $n>0$) , car nous aurions $u_n = u_{2n} - 1 = 0$ et dans ce cas tous les termes suivants devraient être nuls.

Notre hypothèse est à rejeter.

Montrons maintenant qu'il n'est pas possible qu'il existe deux indices *m* et *n* distincts tels que $u_m = u_n$:

Supposons qu'il existe deux tels indices *m* et *n*. Ils doivent avoir la même parité, puisque les termes d'indices impairs sont tous < 1 alors que ceux d'indices pairs sont tous > 1.

- S'ils sont tous deux pairs, $m = 2m'$; $n = 2n'$, alors, vu que $\begin{cases} u_{m'} = u_m - 1 \\ u_{n'} = u_n - 1 \end{cases}$:

  $u_m = u_n \implies u_{m'} = u_{n'}$. Les deux termes « d'indices moitié » sont eux aussi égaux.

- S'ils sont tous deux impairs $m = 2m'+1$; $n = 2n'+1$, alors, vu que : $\begin{cases} u_{2m'} = \frac{1}{1-u_m} \\ u_{2n'} = \frac{1}{1-u_n} \end{cases}$:

  $u_m = u_n \implies u_{2m'} = u_{2n'} \implies u_{m'} = u_{n'}$. Conclusion semblable, $m' = \frac{m-1}{2}$; $n' = \frac{n-1}{2}$.

Nous obtiendrions ainsi deux autres termes égaux, d'indices strictement plus petits que *m* et *n*.

En itérant ce procédé, nous pourrions construire deux suites de termes deux à deux égaux, dont les indices formeraient des suites d'entiers strictement positifs strictement décroissantes.

Nécessairement, le nombre d'itérations possibles est fini et nous aboutirions au cas où l'un des termes est le terme u_1, dont nous avons prouvé l'impossibilité.

L'hypothèse d'existence de deux indices *m* et *n* distincts tels que $u_m = u_n$ est à rejeter.

Tout rationnel strictement positif est égal à un seul terme de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

NB. L'application $n \in \mathbb{N}^* \longmapsto f(n) = u_n \in \mathbb{Q}^{*+}$ est ainsi une application surjective (question 5) et injective (question 6). Elle réalise une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{Q}^{*+}$. La suite étudiée dans cet exercice permet de numéroter l'ensemble des rationnels strictement positifs.

Exercice 2 : Limite sympathique !

Partie A : Quelques exemples

1. Soit l'équation (X_n) : $x^2 + \frac{1}{n}x - 1 = 0$.

1.a. Le produit des racines de cette équation, égal à -1, est strictement négatif. Cette équation a donc deux racines distinctes de signes opposés, et une seule racine x_n strictement positive, en l'occurrence :

$$x_n = \frac{-1+\sqrt{4n^2+1}}{2n}$$

1.b et c. Des écritures équivalentes de x_n sont :

$$x_n = \frac{4n^2}{2n \times \left(1+\sqrt{4n^2+1}\right)} = \frac{2n}{1+\sqrt{4n^2+1}} = \frac{2}{\frac{1}{n}+\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}$$

Avec la dernière écrite, nous obtenons sans aucune indétermination : $x_\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$, solution strictement positive de l'équation **1.c**. La suite $(x_n)_{n\geq1}$ converge vers 1.

2. Soit l'équation (Y_n) : $\frac{1}{n}y^2 - y - 1 = 0$

2.a. Le produit des racines de cette équation, égal à $-n$, est strictement négatif. Cette équation a donc deux racines distinctes de signes opposés, et une seule racine y_n strictement positive, en l'occurrence :

$$y_n = \frac{n+\sqrt{n^2+4n}}{2}$$

2.b. Une écriture équivalente de y_n est :

$$y_n = \frac{n}{2} \times \left(1+\sqrt{1+\frac{4}{n}}\right)$$

Nous obtenons sans aucune indétermination : $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$. La suite $(y_n)_{n\geq1}$ diverge vers plus l'infini.

3. Soit l'équation (Z_n) : $z^3 + \frac{1}{n}z^2 - 1 = 0$

3.a.i. Les fonctions carré et cube sont deux fonctions strictement croissantes sur l'intervalle$[0\,;\,+\infty[$. En tant que somme de deux fonctions strictement croissantes et d'une fonction constante sur $[0\,;\,+\infty[$, la fonction $z \mapsto f_n(z) = z^3 + \frac{1}{n}z^2 - 1$ est une fonction strictement croissante sur$[0\,;\,+\infty[$.

3.a.ii. On note que : $\begin{cases} f_n(0) = -1 < 0 \\ f_n(1) = \frac{1}{n} > 0 \end{cases}$.

- La fonction f_n est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$.
- La fonction f_n est continue sur l'intervalle $[0\,;1]$ (en tant que fonction polynomiale).
- Les images par f_n des extrémités de cet intervalle sont (strictement) de signes contraires.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_n(z) = 0$ possède une solution unique z_n dans l'intervalle $]0\,;1[$.

La croissante stricte de f_n sur l'intervalle$[0\,;\,+\infty[$ justifie que $z > 1 \;\Rightarrow\; f_n(z) > f_n(1) = \frac{1}{n} > 0$. L'équation $f_n(z) = 0$ ne possède aucune autre solution que z_n dans l'intervalle$[0\,;\,+\infty[$.

Le nombre z_n est l'unique solution réelle positive de l'équation $f_n(z) = 0$.

3.b. Pour tout entier $n > 0$, considérons le nombre réel z_n unique solution de l'équation $f_n(z) = 0$.

Ce nombre vérifie la relation : ${z_n}^3 + \frac{1}{n}{z_n}^2 - 1$ soit, aussi bien, la relation : ${z_n}^3 = -\frac{1}{n}{z_n}^2 + 1$

Etudions son image par la fonction f_{n+1} :

$$f_{n+1}(z_n) = {z_n}^3 + \frac{1}{n+1}{z_n}^2 - 1 = \left(-\frac{1}{n}{z_n}^2 + 1\right) + \frac{1}{n+1}{z_n}^2 - 1 = -\frac{{z_n}^2}{n(n+1)}$$

L'image de z_n par la fonction f_{n+1} est strictement négative. Le nombre z_n est donc situé avant le nombre d'image 0 par f_{n+1} :

$$f_{n+1}(z_n) < 0 \;\Longrightarrow\; z_n < z_{n+1}$$

Nous en déduisons que la suite $(z_n)_{n\geq 1}$ est une suite strictement croissante.

Etant une suite strictement croissante et majorée (par le réel 1), cette suite $(z_n)_{n\geq 1}$ est convergente. Elle possède une limite z_∞ qui est ≤ 1.

3.c. Passons à la limite dans la relation annulative qui définit z_n :

$$\lim_{n\to\infty}\left({z_n}^3+\frac{1}{n+1}{z_n}^2-1\right)=0$$

Or : $\lim_{n\to\infty}\left({z_n}^3+\frac{1}{n+1}{z_n}^2-1\right)=\lim_{n\to\infty}({z_n}^3)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}{z_n}^2\right)-1={z_\infty}^3-1$

En conséquence : ${z_\infty}^3-1=0$

Le nombre réel z_∞ est une solution de l'équation : $z^3-1=0$.

4. Soit l'équation (T_n) : $\frac{1}{n}t^3-t^2-1=0$

Considérons la fonction $t\longmapsto g_n(t)=\frac{1}{n}t^3-t^2-1$

Elle est clairement strictement négative (somme de trois termes négatifs dont un strictement) sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$. L'équation (T_n) n'a pas de solution sur cet intervalle.

Etudions g_n sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Elle y admet pour dérivée la fonction : $t\longmapsto g_n'(t)=\frac{3}{n}t^2-2t=\frac{t}{n}(3t-2n)$ qui est négative sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{2n}{3}\right]$ puis strictement positive pour $t>\frac{2n}{3}$. La fonction g_n est ainsi décroissante sur $\left[0\,;\,\frac{2n}{3}\right]$, admet un minimum $g_n\left(\frac{2n}{3}\right)=-1-\frac{4n^2}{27}<0$ puis est strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{2n}{3}\,;\,+\infty\right[$.

On note que : $\begin{cases} g_n(n)=-1<0 \\ g_n(n+1)=\frac{n^2+n+1}{n}>0 \end{cases}$.

- La fonction g_n est strictement croissante sur l'intervalle $[n\,;n+1]$.
- La fonction g_n est continue sur l'intervalle $[n\,;n+1]$ (en tant que fonction polynomiale).
- Les images par g_n des extrémités de cet intervalle sont (strictement) de signes contraires.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

L'équation $g_n(t)=0$ possède une solution unique t_n dans l'intervalle $]n\,;n+1[$.

La croissante stricte de g_n sur l'intervalle $\left[\frac{2n}{3}\,;\,+\infty\right[$ justifie qu'il n'y a pas d'autre solution à cette équation. Le nombre t_n est l'unique solution réelle de l'équation $t_n(z)=0$.

Le fait d'avoir localisé t_n dans l'intervalle $]n\,;\; n+1[$ permet de dire que, pour tout entier n :

$$n < t_n < n+1 < t_{n+1}$$

La suite $(t_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante et diverge vers plus l'infini.

Avec TI-Nspire CAS, valeurs approchées des nombres z_n et t_n pour n allant de 1 à 10.	$zedenne(10)$ {1.,0.754878,1.46557} {2.,0.858094,2.3593} {3.,0.90033,3.27902} {4.,0.923228,4.22417} {5.,0.937581,5.18592} {6.,0.947417,6.15821} {7.,0.954577,7.13741} {8.,0.960021,8.12129} {9.,0.964301,9.10848} {10.,0.967753,10.0981}	"zedenne" enregistr. effectué Define **zedenne**(n)= Prgm Define $f(k,z)=z^3+\dfrac{z^2}{k}-1$ Define $g(k,t)=\dfrac{t^3}{k}-t^2-1$ For k,1,n Disp {k,zeros($f(k,z)$,z)[1],zeros($g(k,t)$,t)[1]} EndFor EndPrgm

Partie B : Polynômes sympathiques

5. Un polynôme de degré au plus d est initialement et faussement sympathique si et seulement si $a_0 = -1$ et pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq d$, $a_k = 0$ puisque a_k doit être alors à la fois positif et négatif (au sens large).

Seul, le polynôme constant et égal à -1 est à la fois initialement et faussement sympathique.

6. Soit $P(x) = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré au plus d.

Si P est faussement sympathique, alors $a_0 = -1$ et tous les autres coefficients sont négatifs ou nuls.

6.a. Pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$, $P(x)$ est somme de nombres tous négatifs, dont l'est strictement. Donc :

$P(x) < 0$ quel que soit x appartenant à $[0, +\infty[$.

6.b. Toutes les fonctions puissances d'exposant > 0 sont strictement croissantes sur $[0, +\infty[$. Puisque tous les a_k $(1 \leq k \leq d)$ sont négatifs ou nuls, toutes les fonctions $x \longmapsto a_k x^k$ $(1 \leq k \leq d)$ sont nulles ou strictement décroissantes (donc décroissantes au sens large) sur $[0, +\infty[$. La fonction $x \longmapsto P(x)$ est somme de fonctions décroissantes (au sens large : strictement décroissantes ou constantes) sur $[0, +\infty[$:

La fonction $x \longmapsto P(x)$ est elle-même décroissante sur $[0, +\infty[$.

7. Soit $P(x) = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré au plus *d*.

Si *P* est à la fois vraiment et initialement sympathique, il se présente sous la forme suivante :

$P(x) = a_d x^d + \cdots + a_{k+1} x^{k+1} - 1$ où tous les a_j $(k+1 \leq j \leq d)$ sont positifs ou nuls avec $a_{k+1} > 0$. En effet, les a_j d'indice $\leq k$ sont à la fois négatifs ou nuls (hypothèse « vraiment ») et positifs ou nuls (hypothèse « initialement »), donc ils sont nuls.

7.a. Toutes les fonctions puissances d'exposant > 0 sont strictement croissantes sur $[0, +\infty[$.

Puisque tous les a_j $(k+1 \leq j \leq d)$ sont positifs ou nuls, un au moins étant strictement positif, toutes ces fonctions $x \longmapsto a_j x^j$ croissantes sur $[0, +\infty[$, l'une au moins l'étant strictement. La fonction $x \longmapsto P(x)$ est somme de fonctions croissantes sur $[0, +\infty[$, l'une au moins l'étant strictement.

La fonction $x \longmapsto P(x)$ est donc elle-même strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

7.b. La fonction $x \longmapsto a_{k+1} x^{k+1} - 1$ a pour limite plus l'infini en plus l'infini.

La fonction $x \longmapsto P(x)$ apparaît comme la somme d'une fonction qui a pour limite plus l'infini en plus l'infini et de fonctions positives. Elle a pour limite plus l'infini en plus l'infini.

La fonction $x \longmapsto P(x)$ étant strictement croissante et continue sur $[0, +\infty[$, elle réalise une bijection de cet intervalle sur son intervalle image $\left[P(0) = -1, \lim\limits_{+\infty} P = +\infty\right[$. Elle prend une fois et une seule toute valeur de cat intervalle, en particulier la valeur 0 (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires).

L'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive.

8. Soit $P(x) = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré au plus *d*.

Si *P* est vraiment mais pas initialement sympathique, il se présente sous la forme suivante :

$P(x) = \left(a_d x^d + \cdots + a_{k+1} x^{k+1}\right) + \left(a_k x^k + \cdots - 1\right)$ où tous les a_j pour $k+1 \leq j \leq d$ sont positifs ou nuls avec $a_{k+1} > 0$ et où tous les a_j d'indice $\leq k$ sont négatifs, l'un au moins parmi ceux de $\{1 ; 2 ; \ldots ; k\}$ l'étant strictement (puisque « non initialement »).

Dérivons : $P'(x) = \left(da_d x^{d-1} + \cdots + (k+1)a_{k+1}x^k\right) + \left(ka_k x^{k-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1\right)$

Notons $\ell + 1$ le plus petit indice parmi ceux de $\{1\,;2\,;\ldots;k\}$ qui est strictement négatif.

$$P'(x) = \left(da_d x^{d-1} + \cdots + (k+1)a_{k+1}x^k\right) + \left(ka_k x^{k-1} + \cdots + a_{\ell+1}x^{\ell}\right)$$

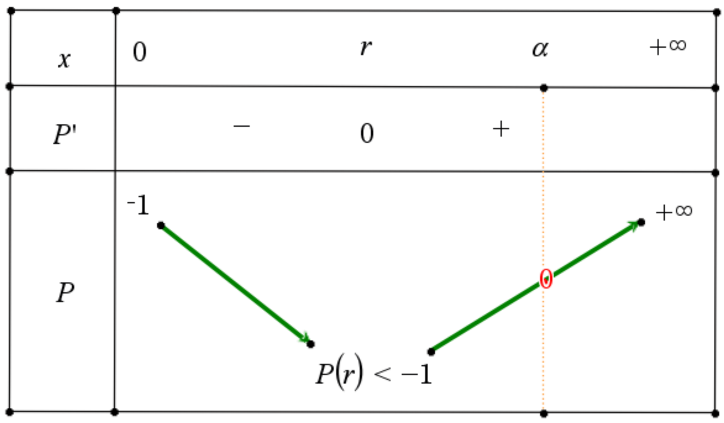
$$P'(x) = |a_{\ell+1}|x^{\ell}\left[\left(\frac{da_d}{|a_{\ell+1}|}x^{d-\ell-1} + \cdots + \frac{(k+1)a_{k+1}}{|a_{\ell+1}|}x^{k-\ell}\right) + \left(\frac{ka_k}{|a_{\ell+1}|}x^{k-\ell-1} + \cdots + (-1)\right)\right]$$

Le polynôme $Q(x) = \left(\frac{da_d}{|a_{\ell+1}|}x^{d-\ell-1} + \cdots + \frac{(k+1)a_{k+1}}{|a_{\ell+1}|}x^{k-\ell}\right) + \left(\frac{ka_k}{|a_{\ell+1}|}x^{k-\ell-1} + \cdots + (-1)\right)$ est un polynôme vraiment sympathique car son coefficient constant est égal à -1, ses premiers coefficients sont négatifs ou nuls, puis $\frac{(k+1)a_{k+1}}{|a_{\ell+1}|}$ est strictement positif et ses suivants sont positifs.

Cette fonction polynôme *Q* vérifie les hypothèses de la question précédente, elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur son intervalle image $[-1,+\infty[$. Il en résulte que *P'* est d'abord strictement négative jusqu'à la solution *r* de l'équation $Q(x) = 0$ puis strictement positive.

8.b. On peut résumer l'étude demandée dans le tableau de variations ci-contre, qui met en évidence l'existence d'une unique solution α strictement positive de l'équation $P(x) = 0$

En effet, des conditions analogues (continuité, stricte monotonie, changement de signe) à celles de la question **7.b.** sont réunies.



(Notamment : $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(a_{k+1}x^{k+1}\left[\left(a_d x^{d-k-1} + \cdots + 1\right) + \left(\frac{a_k}{x} + \cdots - \frac{1}{x^{k+1}}\right)\right]\right) = +\infty$).

9. En résumé de cette partie, soit *P* un polynôme de degré au plus *d* et tel que $a_0 = -1$. Classifions les polynômes sympathiques suivant les propriétés des autres coefficients a_j où $1 \leq j \leq d$:

<table>
<tr><td>Propriétés</td><td>Sympathie</td><td>$P(x) = 0$</td><td>Signe sur $[0\ ;\ +\infty[$</td></tr>
<tr><td>$a_j \leq 0$ (tous)</td><td>Faussement</td><td>Aucune solution</td><td>$P(x) \leq -1$</td></tr>
<tr><td>$a_j \geq 0$ (tous)</td><td>Initialement</td><td rowspan="2">Une seule α</td><td rowspan="2">Sur $[0\ ;\ \alpha[: P(x) < 0$
Sur $]\alpha\ ;\ +\infty[: P(x) > 0$</td></tr>
<tr><td>Il existe k tel que $1 \leq k \leq d-1$:
$a_j \leq 0$ si $1 \leq j \leq k$
$a_{k+1} > 0$
$a_j \geq 0$ si $k+2 \leq j \leq d$</td><td>Vraiment</td></tr>
</table>

Partie C : De la suite dans les idées.

10. On sait que, si une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite u_∞, alors pour tout réel λ la suite $(\lambda u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\lambda . u_\infty$ (homogénéité). On sait aussi qu'une somme de suites convergentes est convergente vers la somme de leurs limites (additivité).

Soit alors *t* fixé.

- Pour tout entier k tel $0 \leq k \leq d$, la suite $\left(a_{k,n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers $a_{k,\infty}$ donc d'après la propriété d'homogénéité, la suite $\left(a_{k,n} \times t^k\right)_{n\geq 1}$ converge vers $a_{k,\infty} \times t^k$
- D'après la propriété d'additivité, la somme $\left(P_n(t) = \sum_{k=0}^{d} a_{k,n} \times t^k\right)_{n\geq 1}$ converge vers :

  $\sum_{k=0}^{d} a_{k,\infty} \times t^k = P_\infty(t)$

11. Soit une suite de polynômes vraiment sympathiques de degré au plus *d* dont les suites de coefficients convergent : $P_n(x) = a_{d,n}x^d + \cdots + a_{1,n}x + a_{0,n}$. L'hypothèse de « vraie sympathie » implique deux choses :

- La suite $\left(a_{0,n}\right)_{n\geq 1}$ est constante et égale à $-1 = a_{0,\infty}$
- Il existe une infinité de termes $a_{j,n}$ qui sont strictement positifs et qui séparent la liste de coefficients en deux, les $a_{i,n}$ d'indices $i < j$ sont négatifs ou nuls, les $a_{i,n}$ d'indices $i > j$ sont positifs ou nuls (puisque chaque P_n a au moins un tel séparateur).

Parmi les *d* suites $(a_{d,n})_{n\geq 1}$; ...; $(a_{1,n})_{n\geq 1}$ de coefficients, il y en a au moins une qui contient une infinité de séparateurs. Soit $k+1$ son indice. Cette suite $(a_{k+1,n})_{n\geq 1}$ contenant une infinité de séparateurs strictement positifs, ne peut converger que vers une limite positive ou nulle : $a_{k+1,\infty} \geq 0$.

Pour $i \leq k$, la suite $(a_{i,n})_{n\geq 1}$ contient une infinité de termes négatifs ou nuls. Elle ne peut converger que vers une limite négative ou nulle : $a_{i,\infty} \leq 0$.

Pour $i > k+1$, la suite $(a_{i,n})_{n\geq 1}$ contient une infinité de termes positifs ou nuls. Elle ne peut converger que vers une limite positive ou nulle : $a_{i,\infty} \geq 0$.

Ainsi, de deux choses l'une :

- Ou bien l'un des $a_{i,\infty}$ parmi ceux d'indices $k+1 \leq i \leq d$ est strictement positif et dans ce cas on obtient un polynôme dont les premiers coefficients sont négatifs ou nuls, puis il y a un coefficient strictement positif suivi de coefficients positifs ou nuls, le polynôme P_∞ est vraiment sympathique.
- Ou bien $a_{i,\infty} = 0$ pour tout *i* tel que $k+1 \leq i \leq d$ et dans ce cas on obtient un polynôme dont tous les coefficients sont négatifs ou nuls, P_∞ est faussement sympathique.

12. Supposons que P_∞ soit vraiment sympathique, et soit x_∞ son zéro.

12.a. Soit *u* et *v* deux réels tels que $0 < u < x_\infty < v$. Compte tenu des résultats obtenus dans le cas de « vraie sympathie », ce rangement implique que : $P_\infty(u) < 0 < P_\infty(v)$.

Posons $\varepsilon = \min\left(\frac{|P_\infty(u)|}{2} ; \frac{P_\infty(v)}{2}\right)$.

- $(P_n(u))_{n\geq 1}$ convergeant vers $P_\infty(u)$, il existe un entier n_u tel que : $n \geq n_u \implies |P_n(u) - P_\infty(u)| \leq \varepsilon$ et dans ce cas : $\frac{3}{2}P_\infty(u) \leq P_n(u) \leq \frac{1}{2}P_\infty(u) < 0$
- $(P_n(v))_{n\geq 1}$ convergeant vers $P_\infty(v)$, il existe un entier n_v tel que : $n \geq n_v \implies |P_n(v) - P_\infty(v)| \leq \varepsilon$ et dans ce cas : $0 < \frac{1}{2}P_\infty(v) \leq P_n(v) \leq \frac{3}{2}P_\infty(v)$

Considérons le nombre entier $M(u,v) = \max(n_u ; n_v)$. Pour tout entier $n \geq M(u,v)$, les deux conditions précédentes sont simultanément vérifiées, et nous obtenons : $n \geq M(u,v) \implies P_n(u) < 0 < P_n(v)$.

12.b. Soit α un réel strictement positif (aussi petit que l'on veut).

Appliquons les résultats du **12.a** avec $u = x_\infty - \alpha$ et $v = x_\infty + \alpha$.

Il existe un nombre entier M_α tel que : $n \geq M_\alpha \implies P_n(x_\infty - \alpha) < 0 < P_n(x_\infty + \alpha)$. Nous pouvons appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[x_\infty - \alpha \,;\, x_\infty + \alpha]$, intervalle sur lequel ces polynômes P_n sont des fonctions continues et changeant de signe : leur zéro est dans cet intervalle.

Pour tout réel strictement positif α (aussi petit que l'on veut), il existe un nombre entier M_α tel que :

$$n \geq M_\alpha \implies |x_n - x_\infty| \leq \alpha$$

Ce qui prouve la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ vers x_∞.

13. Nous avons vu dans la résolution de la **question 11** que nous obtenons un polynôme P_∞ faussement sympathique dans le cas où toutes les suites $\left(a_{j,n}\right)_{n\geq 1}$ de coefficients positifs convergent vers 0.

Pour tout réel α strictement positif (aussi petit que l'on veut), il existe un entier n_α tel que :

$n \geq n_\alpha \implies \max\limits_j\left(a_{j,n}\right) \leq \alpha$.

Dans ce cadre, pour tout réel $x > 0$, $n \geq n_\alpha \implies P_n(x) \leq -1 + \alpha\left(1 + x + \cdots + x^d\right)$.

En particulier, en ce qui concerne la solution x_n de l'équation $P_n(x) = 0$, nous obtenons l'inégalité :

$n \geq n_\alpha \implies 1 + x_n + \cdots + {x_n}^d \geq \frac{1}{\alpha}$. Et ce nombre $\frac{1}{\alpha}$ peut être rendu « aussi grand que l'on veut ».

Ceci prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + x_n + \cdots + {x_n}^d\right) = +\infty$ et s'il en est ainsi, c'est que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n) = +\infty$

La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ diverge vers plus l'infini.

14. Dans la **partie A.1 et 3**, les polynômes P_∞ sont les polynômes $P_\infty(x) = x^2 - 1$ et $P_\infty(z) = z^3 - 1$ qui sont vraiment sympathiques et pour lesquels la racine strictement positive est égale à 1. Il y a convergence vers 1.

Dans la **partie A.2 et 4**, les polynômes P_∞ sont les polynômes $P_\infty(y) = -y - 1$ et $P_\infty(t) = -t^2 - 1$ qui sont faussement sympathiques. Il y a divergence vers plus l'infini.

Exercice 3 : Polynômes et polygones réguliers

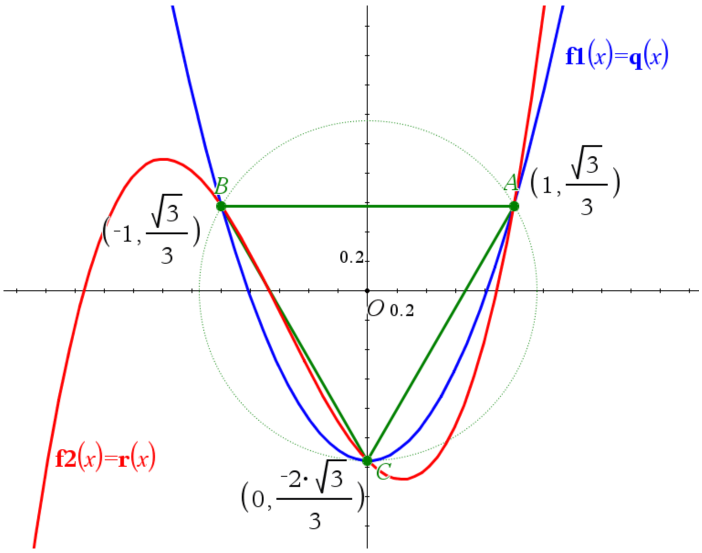
Partie A : Triangles équilatéraux

1. La représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine) est une droite. Les sommets distincts d'un triangle équilatéral étant au nombre de 3 et cocycliques, ils ne peuvent tous trois être à la fois sur le cercle et sur la droite (lesquels n'ont que 2 points d'intersection).

2.a, b et c en image avec TI-Nspire CAS.

ABC apparaît comme un triangle équilatéral direct de côté 2.

Les représentations graphiques des fonctions Q et R passent par les sommets du triangle.



2.d. Les questions **2.b** et **2.c** montrent respectivement qu'il existe un polynôme de degré 2 et un polynôme de degré 3 dont les représentations passent par *A, B* et *C*.

Define $q(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(3\cdot x^2-2)$	*Terminé*
Define $r(x)=q(x)+x\cdot(x^2-1)$	*Terminé*
$\{q(-1),q(0),q(1)\}$	$\left\{\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{-2\cdot\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$
$\{r(-1),r(0),r(1)\}$	$\left\{\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{-2\cdot\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

Pour $d \geq 4$ posons : $R_d(x) = Q(x) + x^{d-2}(x^2-1)$

Il s'agit, par construction, du polynôme $Q(x)$ augmenté d'un polynôme de degré *d* qui s'annule en $-1; 0$; 1. Sa représentation graphique passe par *A, B* et *C*.

Partie B : Carrés de centre O

3.a. La rotation *r* de centre *O* et d'angle droit direct, $M(x\,;y) \longmapsto r(M) = M'(x\,';y')$ est définie analytiquement par les formules : $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$.

Si *A* est un point distinct de *O* de coordonnées $(u\,;v)$, alors les points *B, C, D* sont les points :

$$B(-v,u)\,;C(-u\,;\,-v)\,;D(v\,;\,-u)$$

Montrons que les quatre abscisses sont distinctes et non nulles :

On sait que la courbe représentative d'une fonction, ne peut pas passer par deux points distincts de même abscisse (par une fonction, tout réel de son ensemble de définition a une image et une seule).

Cette propriété s'applique au cas d'une fonction polynôme dont la courbe représentative passe par les quatre points *A, B, C, D* et justifie que ces points ont nécessairement des abscisses distinctes.

$u\,;\,-v\,;-u\,;\,v$ sont deux à deux distincts.

En conséquence, $u \neq -u$, donc $u \neq 0$ et $v \neq -v$, donc $v \neq 0$: les quatre abscisses sont toutes non nulles.

3.b. Vu la disposition relative des sommets d'un carré dans le plan, une fonction continue doit changer au moins deux fois de sens de variation pour que sa courbe représentative puisse passer par les quatre sommets. Dans le cas d'une fonction polynôme *P*, cette fonction ne peut être ni constante (ce qui élimine le cas du polynôme nul), ni affine, ni de degré 2 (qui ne change qu'une fois de sens de variation).

Une fonction polynôme *P* dont la courbe représentative C_P passe par les quatre sommets du carré *ABCD* est au moins de degré 3.

4. Soit $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme dont la courbe représentative C_P passe par les quatre points *A, B, C, D*. Les coefficients *a, b, c* sont solution du système :

$$\begin{cases} P(u) = u^3 + au^2 + bu + c = v \\ P(-v) = -v^3 + av^2 - bv + c = u \\ P(-u) = -u^3 + au^2 - bu + c = -v \\ P(v) = v^3 + av^2 + bv + c = -u \end{cases}.$$

4.a. En ajoutant membre à membre les équations (1) et (3), ainsi que (2) et (4), nous obtenons : $\begin{cases} 2au^2 + c = 0 \\ 2av^2 + c = 0 \end{cases}$.

Vu que les nombres *u* et *v* ne sont ni nuls ni opposés, leurs carrés sont distincts. Le système $\begin{cases} 2au^2 + c = 0 \\ 2av^2 + c = 0 \end{cases}$ a donc pour solution la solution nulle $a = c = 0$.

Il en résulte que le polynôme *P* est un polynôme impair de la forme $P(x) = x^3 + bx$

4.b. Le système initial se résume désormais au système de deux équations : $\begin{cases} P(u) = u^3 + bu = v \\ P(v) = v^3 + bv = -u \end{cases}$

En combinant les deux équations, nous obtenons aussi bien :

$P(P(u)) = -u$ que $P(u) = -P(-u) = -P(P(v)) = v$.

Les deux nombres réels *u* et *v* sont des solutions de l'équation : $P(P(x)) = -x$ soit de $P(P(x)) + x = 0$.

Le polynôme *P* étant impair, son composé par lui-même $P \circ P$ est aussi impair, et les opposés $-u$ et $-v$ vérifient eux aussi la même équation.

Le calcul montre que l'équation en question est l'équation :

$x(x^8 + 3bx^6 + 3b^2x^4 + b(b^2 + 1)x^2 + b^2 + 1) = 0$

Puisque *u* et *v* sont non nuls, l'équation efficiente est : $x^8 + 3bx^6 + 3b^2x^4 + b(b^2 + 1)x^2 + b^2 + 1 = 0$

Notons $R(x) = x^8 + 3bx^6 + 3b^2x^4 + b(b^2 + 1)x^2 + b^2 + 1$.

4.c. Soit le polynôme : $Q(x) = x^4 + 3bx^3 + 3b^2x^2 + b(b^2 + 1)x + b^2 + 1$.

En comparant avec l'équation de la question précédente, nous constatons que : $Q(x) = R(\sqrt{x})$. Considérons les quatre solutions de l'équation précédente avec les mêmes notations *u* et *v*.

Nous obtenons : $Q(u^2) = R(u) = 0$ et de même $Q(v^2) = R(v) = 0$.

Puisque *u* et *v* sont ni égaux ni opposés, leurs carrés sont distincts.

Le polynôme *Q* admet au moins deux racines distinctes strictement positives, les carrés des solutions de l'équation du **4.b**.

4.d. Si $b \geq 0$, alors pour tout $x \geq 0$, $Q(x) = x^4 + 3bx^3 + 3b^2x^2 + b(b^2+1)x + b^2 + 1$ est une somme de termes tous positifs dont au moins un l'est strictement : $b \geq 0 \implies Q(x) \geq 1 > 0$ pour tout $x \geq 0$.

Or, la question **4.c** montre qu'il existe deux réels strictement positifs pour lesquels $Q(x) = 0$. Par contraposition, cette existence de tels réels montre que $b < 0$.

4.e. En développant l'expression fournie par l'énoncé :

$$Q(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)^2 = x^4 - 2(\alpha+\beta)x^3 + (\alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta)x^2 - 2\alpha\beta(\alpha+\beta)x + \alpha^2\beta^2$$

Identifions les coefficients obtenus avec ceux de l'expression de la question **4.c** :

$$\begin{cases} 3b = -2(\alpha+\beta) \\ 3b^2 = \alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta \\ b(b^2+1) = -2\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ b^2+1 = \alpha^2\beta^2 \end{cases}$$

Nous pouvons en déduire, en combinant (1) et (3) : $b^2+1 = -3\alpha\beta$ puis : $(b^2+1)^2 = 9\alpha^2\beta^2 = 9(b^2+1)$.

Le nombre *b* vérifie : $b^2 + 1 = 9$, soit $b^2 = 8$.

Vu que *b* est strictement négatif, nous trouvons bien $b = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$, conformément à l'énoncé.

Déterminons α et β :

Il s'agit de deux réels strictement positifs tels que : $\begin{cases} -2(\alpha+\beta) = 3b = -6\sqrt{2} \\ \alpha^2\beta^2 = b^2+1 = 9 \end{cases}$ soit tels que $\begin{cases} \alpha+\beta = 3\sqrt{2} \\ \alpha\beta = 3 \end{cases}$

Ces deux nombres sont les solutions de l'équation au second degré $X^2 - 3X\sqrt{2} + 3 = 0$. Nous obtenons :

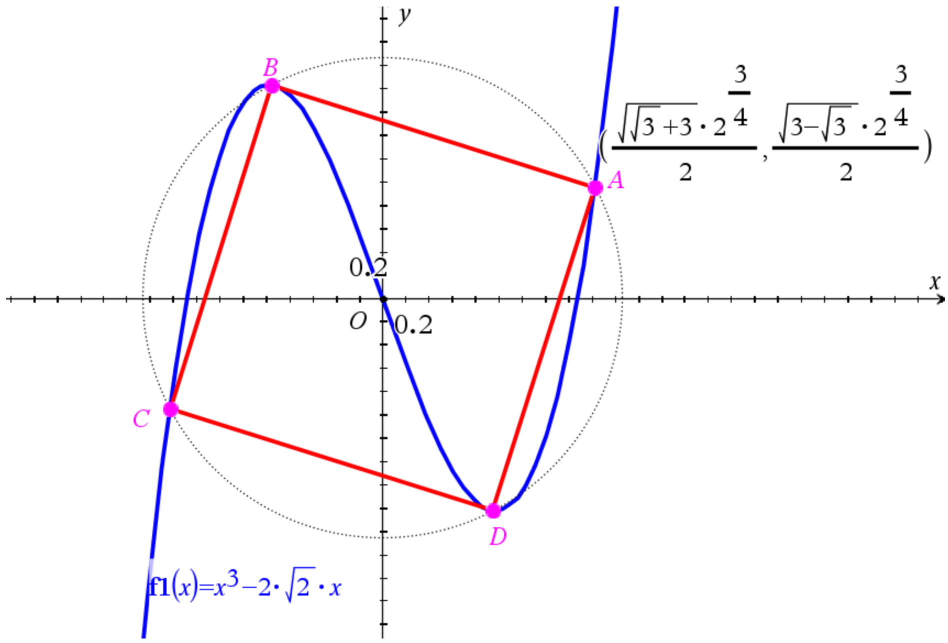
$$\alpha = \frac{(3-\sqrt{3})\sqrt{2}}{2} \;\; ; \;\; \beta = \frac{(3+\sqrt{3})\sqrt{2}}{2}$$

D'après la question **4.c**, les racines de *Q* sont les carrés des nombres *u* et *v* définis à la question **3**, qui sont les coordonnées d'un sommet du carré.

Nous en déduisons :

$$u = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{3})\sqrt{2}}{2}} \;\; ; \;\; v = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{3})\sqrt{2}}{2}}$$

Nous obtenons en fin de compte la figure ci-contre



Partie C : Où l'on prouve que $d \geq k-1$

6. Considérons un polygone régulier $M_1M_2 \dots M_k$à k sommets, inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R. notons x_j l'abscisse du point M_j et φ_j la mesure de de l'angle $(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM_j}})$ qui appartient à l'intervalle $[-\pi\ ;\ +\pi[$.

La relation entre ces mesures et les coordonnées des M_j est que : $x_j = R\cos(\varphi_j)\ ;\ y_j = R\sin(\varphi_j)$.

Le polygone étant régulier de sens direct, les angles $(\widehat{\overrightarrow{OM_j}, \overrightarrow{OM_{j+1}}})$ sont égaux et ont pour mesure commune $\frac{2\pi}{k}$, de sorte que pour tout indice j tel que $1 \leq j \leq k$, la mesure de l'angle $(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM_j}})$ qui appartient à l'intervalle $[-\pi\ ;\ +\pi[$ est le nombre réel $\varphi_1 + \frac{2\pi\times(j-1)}{k}$.

Dans chaque intervalle $\left[-\pi + \frac{2\pi\times(j-1)}{k}\ ; -\pi + \frac{2\pi\times j}{k}\right[$, il y a une telle mesure.

6.a. L'ensemble $\{x_1\ ; \dots ;\ x_k\}$ étant un ensemble fini, il possède un plus petit élément. On peut permuter circulairement l'indexation de façon à ce que x_1 soit ce plus petit élément.

De plus, s'il existe un polynôme P dont la courbe représentative passe par les sommets de ce polygone, alors la courbe représentant le polynôme $-P$ passe par les sommets de son polygone symétrique par rapport à l'axe Ox. L'un des deux points symétriques d'abscisse x_1 a une ordonnée négative. On peut choisir pour notre « supposition » celui des deux polygones qui a cette propriété.

6.b. Pour tout réel x appartenant à l'ensemble de définition d'une fonction f, quelle qu'elle soit, nous savons qu'il y a un et un seul point d'abscisse x qui appartient à la courbe représentative de cette fonction puisque x a une seule image par f.

Donc, si la courbe représentative d'un polynôme P passe par les sommets du polygone $M_1M_2 \dots M_k$, alors ces points ont des abscisses deux à deux distinctes.

Supposons qu'il existe i tel que $y_i = 0$. Alors, l'axe Ox serait un axe de symétrie du polygone puisque cet axe passe par le centre du polygone et un sommet. Les sommets non placés sur Ox seraient alors deux à deux symétriques par rapport à Ox et auraient la même abscisse, ce qui contredirait le début de cette question.

Nécessairement, tous les sommets ont des ordonnées non nulles.

6.c et d. Soit φ_1 la mesure de l'angle $(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM_1}})$ qui appartient à l'intervalle $[-\pi\ ;\ +\pi[$. Le polygone étant régulier de sens direct, les angles $(\widehat{\overrightarrow{OM_j}, \overrightarrow{OM_{j+1}}})$ sont égaux et ont pour mesure commune $\frac{2\pi}{k}$, de sorte que pour tout indice j tel que $1 \leq j \leq k$, la mesure de l'angle $(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM_j}})$ qui appartient à l'intervalle $[-\pi\ ;\ +\pi[$ est le nombre réel $\varphi_1 + \frac{2\pi\times(j-1)}{k}$.

La fonction cosinus étant une fonction croissante sur $[-\pi\ ; 0]$ et décroissante sur $[0\ ;\ \pi]$, les abscisses x_j sont rangées dans l'ordre des mesures d'angles φ_j qui sont négatives (correspondant aux sommets d'ordonnées négatives) et dans l'ordre inverse de celles qui sont positives (correspondant aux sommets d'ordonnées positives). Les plus petites abscisses sont celles associées d'une part à $\varphi_1 \in \left[-\pi\ ; -\pi + \frac{2\pi}{k}\right]$ et d'autre part à $\varphi_k = \varphi_1 + \frac{2\pi(k-1)}{k} = 2\pi + \varphi_1 - \frac{2\pi}{k} \in \left[\pi - \frac{2\pi}{k}\ ;\ \pi\right]$. Posons $\theta = \varphi_1 - \pi$.

On sait déjà par construction que $\theta \in \left[0\,;\,\frac{2\pi}{k}\right]$

- D'une part : $x_1 = R\cos(\varphi_1) = R\cos(\pi+\theta) = -R\cos(\theta)$ et $y_1 = -R\sin(\pi+\theta) = -R\sin(\theta)$
- D'autre part $x_k = R\cos(\varphi_k) = R\cos\left(\varphi_1 - \frac{2\pi}{k}\right) = -R\cos\left(\frac{2\pi}{k} - \theta\right)$

Pour que x_1 soit le plus petit des deux nombres, il faut que $\cos(\theta) > \cos\left(\frac{2\pi}{k} - \theta\right)$ et pour cela que $\frac{2\pi}{k} - \theta > \theta$

Ainsi, $\theta \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{k}\right]$ (la « première moitié » de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{2\pi}{k}\right]$).

De plus, la condition $y_1 \neq 0$ élimine la valeur 0.

En fin de compte, $\theta \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{k}\right]$ et $x_1 = R\cos(\varphi_1)\,;\; y_1 = R\sin(\varphi_1)$.

Par ajouts successifs de $\frac{2\pi}{k}$ à φ_1 et retraits successifs de $\frac{2\pi}{k}$ à φ_k, on obtient, tant qu'il n'y a pas de changement de signe (ce qui se produit à mi-parcours), les rangements $\varphi_1 < \varphi_2 < \cdots$ et $\varphi_k > \varphi_{k-1} > \cdots$, avec un rangement de leurs cosinus : $\cos(\varphi_1) < \cos(\varphi_k) < \cos(\varphi_2) < \cos(\varphi_{k-1}) < \cdots$.

Il en résulte le rangement : $x_1 < x_k < x_2 < x_{k-1} < \cdots$

6.e. Les sommets d'abscisses $x_1,\ x_k,\ x_2,\ x_{k-1}, \ldots$ ont, alternativement, des ordonnées négative puis positive, puis négative, ... Si la courbe représentative d'un polynôme *P* passe par tous les sommets, ce polynôme vérifie : $P(x_1) < 0\,; P(x_k) > 0\,;\ P(x_2) < 0\,; P(x_{k-1}) > 0\,;$ ...

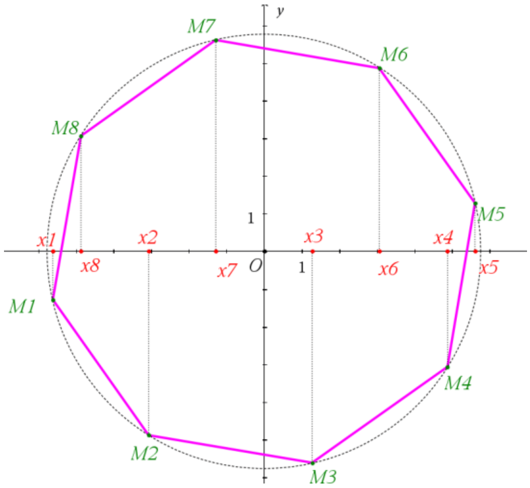
Sur chacun des $(k-1)$ segments $[x_1\,;\,x_k]\,;\,[x_k\,;\,x_2]\,;\,[x_2\,;\,x_{k-1}]$ ..., la fonction polynôme *P* est une fonction continue qui change strictement de signe. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, *P* prend au moins une fois la valeur 0 sur chacun d'entre eux. Ce polynôme *P* admet au moins $(k-1)$ racines.

6.f. On sait qu'un polynôme de degré *d* admet au plus *d* racines.

Pour que le polynôme *P* admette au moins $(n-1)$ racines, il faut que son degré soit au moins égal à ce nombre de racines : $d \geq n-1$.

.

Exemple de rangement des abscisses x_k lorsque k est un nombre pair ($k = 8$).



Partie D : Où l'on prouve que tout entier $d \geq k - 1$ convient

7.a. Le repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right)$ est l'image du repère $\mathfrak{R}$ par la rotation de centre *O* et d'angle de mesure *a*. Il est donc orthonormé.

Notons que la matrice de passage des « anciennes » coordonnées aux « nouvelles » est la matrice $\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$

7.b. Le point *B* est l'image du point de coordonnées $(1\ ; 0)$ par la rotation de centre *O* et d'angle de mesure $a + b$. Il se déduit du point *A* par la rotation de centre *O* et d'angle de mesure *a*. Ses coordonnées dans le repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right)$ sont donc $(\cos(b)\ ; \sin(b))$.

7.c. On sait que, dans un changement de repère, la matrice-colonne des « anciennes » coordonnées s'exprime en fonction de la matrice-colonne des « nouvelles » coordonnées par l'action de la matrice de passage :

En l'occurrence :

$$\begin{pmatrix} \cos(a+b) \\ \sin(a+b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(b) \\ \sin(b) \end{pmatrix}$$

Ce qui donne, par identification, la première formule de l'énoncé.

La deuxième formule s'en déduit en changeant *b* en $-b$.

Notons que des deux formules de l'énoncé, nous pouvons en déduire une troisième qui nous servira dans la question suivante : $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a) . \cos(b)$

8.a. Soit $\wp_n$ la propriété, liée à l'entier *n* : « $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ ». Démontrons cette propriété par une récurrence portant sur deux rangs consécutifs.

Initialisation : $T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0 \times \theta)$ et $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta) = \cos(1 \times \theta)$. La propriété $\wp_n$ est vérifiée aux rangs 0 et 1.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier naturel *n*, les propriétés $\wp_n$ et $\wp_{n+1}$ soient vérifiées. C'est-à-dire supposons que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ et que $T_{n+1}(\cos(\theta)) = \cos((n+1)\theta)$.

Au rang suivant : $T_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta) \times T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta))$.

Appliquons l'hypothèse de récurrence : $T_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta) \times \left(\cos\big((n+1)\theta\big)\right) - \cos(n\theta)$.
Appliquons la « troisième formule » de la question précédente :
$2\cos(\theta) \times \left(\cos\big((n+1)\theta\big)\right) - \cos(n\theta) = \left(\cos\big((n+1)\theta + \theta\big) + \cos\big((n+1)\theta - \theta\big)\right) - \cos(n\theta)$.

Soit : $T_{n+2}(\theta) = 2\cos(\theta) \times \left(\cos\big((n+1)\theta\big)\right) - \cos(n\theta) = \cos((n+2)\theta)$. Ce qui démontre l'hérédité.

$$(\wp_n \text{ et } \wp_{n+1}) \implies \wp_{n+2}$$

La propriété $\wp_n$: « $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ » est vérifiée pour tout entier naturel *n*.

8.b. Considérons l'expression $T_{\ell-1}\left(\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)\right) - \cos(\ell\theta)\times\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)$ et

Appliquons à $T_{\ell-1}\left(\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)\right)$la propriété démontrée dans la question précédente :

$$T_{\ell-1}\left(\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)\right) = \cos\left((\ell-1)\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)\right) = \cos\left(\ell\theta - \theta + 2j\pi - \frac{2j\pi}{\ell}\right) = \cos\left(\ell\theta - \left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)\right)$$

$$T_{\ell-1}\left(\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)\right) = \cos\left(\ell\theta - \left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)\right) = \cos(\ell\theta)\times\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right) + \sin(\ell\theta)\times\sin\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)$$

Nous obtenons :

$$T_{\ell-1}\left(\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)\right) - \cos(\ell\theta)\times\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right) = \sin(\ell\theta)\times\sin\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)$$

8.c. Appliquons la relation précédente avec les données de la question **C.6** lorsque $\ell = d$.

Dans un tel cas : $R\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right) = -x_j$ et $R\sin\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right) = -y_j$

$$T_{d-1}\left(\frac{-x_j}{R}\right) + \cos(d\theta)\times\frac{x_j}{R} = -\sin(d\theta)\times\frac{y_j}{R}$$

Nous obtenons :

$$-\frac{R}{\sin(d\theta)}T_{d-1}\left(\frac{-x_j}{R}\right) - \frac{\cos(d\theta)}{\sin(d\theta)}\times x_j = y_j$$

Nous pouvons proposer comme fonction polynôme de degré $d-1$ dont la courbe contient les sommets du polygone régulier la fonction polynôme :

$$P(x) = -\frac{R}{\sin(d\theta)}T_{d-1}\left(-\frac{x}{R}\right) - \frac{\cos(d\theta)}{\sin(d\theta)}\times x$$

Où R représente le rayon du cercle circonscrit au polygone régulier à d sommets et où θ a été défini par l'énoncé.

En lui ajoutant un polynôme de la forme $Q(x) \times \prod_{j=1}^{d}(x - x_j)$, nous ne changeons pas les valeurs prises par ce polynôme aux points x_j.

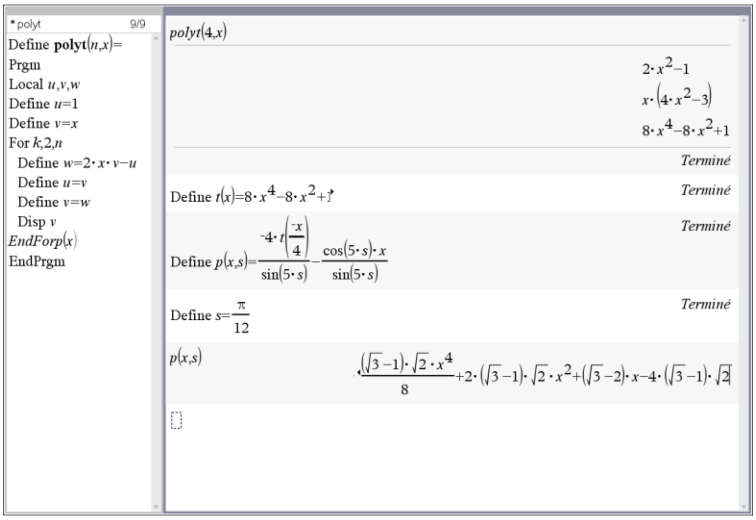
Tout polynôme de la forme suivante (dont le degré est $\geq d$) convient, Q étant un polynôme arbitraire :

$$x \longmapsto P(x) + Q(x) \times \prod_{j=1}^{k}(x - x_j)$$

Etude d'un exemple : cas d'un pentagone avec $\theta = \frac{\pi}{12}$

Nous avons commencé par définir les polynômes T_k jusqu'au quatrième.

Nous considérons le pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 4 et tel que $\varphi_1 = -\pi + \frac{\pi}{12}$, soit tel que $\theta = \frac{\pi}{12}$ (variable s ci-contre).



Le logiciel TI-Nspire CAS affiche sur la copie d'écran précédente le polynôme P du quatrième degré correspondant.

Représentation graphique ci-contre.