CORRIGÉ

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Classes de terminale S • 2017

Source • Gilbert JULIA

Concours général 2017 série S. Eléments de correction

Auteur du document : Gilbert JULIA, professeur agrégé honoraire
Ancien préparateur au concours du CAPES de Mathématiques

Problème 1 : Parties de C de type S

Un ensemble « de type S » est un ensemble de nombres complexes stable par multiplication et par somme de carrés.

Partie A

1. $b(\{0\})=1$; $b(\mathbf{C})=\infty$; $b(\mathbf{N})=2$; $b(\mathbf{N}^*)=1$

2.1. Soit A l'ensemble des entiers relatifs pairs privé de zéro : $A=(2\mathbf{Z})^*$. Le produit de deux entiers relatifs pairs est un entier pair et la somme des carrés de deux entiers pairs est un entier pair. Cet ensemble A est « de type S ». Il n'y a aucun élément de A de module inférieur ou égal à 1 : $b(A)=0$

2.2. L'ensemble des entiers relatifs $\mathbf{Z}$ est de type S et possède exactement trois éléments de module inférieur ou égal à 1 : $\{-1\ ;\ 0\ ;\ 1\}$.

3. L'application conjugaison $z\mapsto \overline{z}$ réalise une bijection de $\mathbf{C}$ sur lui même compatible avec le produit comme avec les sommes de carrés (c'est-à-dire que le conjugué d'un produit de deux complexes est le produit de leurs conjugués et que le conjugué d'une somme de carrés est la somme des carrés de leurs conjugués).

De plus, quel que soit le complexe z : $|\overline{z}|=|z|$ et en conséquence : $|\overline{z}|\leq 1 \Leftrightarrow |z|\leq 1$

L'image par conjugaison d'un ensemble A de type S est de type S et de plus $b(\overline{A})=b(A)$

Partie B : Deux exemples de parties de **C** de type *S*

L'ensemble **Z** *des entiers relatifs, muni de l'addition et de la multiplication possède une structure algébrique d'anneau, c'est-à-dire que :*

- **Z** *est un groupe pour addition (la somme et la différence de deux entiers relatifs sont des entiers relatifs ; zéro, élément neutre pour l'addition est un entier relatif ; l'opposé d'un entier relatif est un entier relatif)*
- **Z** *est stable par multiplication (le produit de deux entiers relatifs est un entier relatif)*

Dans ces conditions, tout cocktail de sommes, différences et produits (en particulier carrés) d'entiers relatifs est un entier relatif. Nous utiliserons à plusieurs reprises cette propriété.

1.1. Les complexes $1,\ j,\ j^2$ étant les trois racines cubiques de l'unité : $1+j+j^2=0$.

1.2. Soient $z_1=a_1+b_1\,j$ et $z_2=a_2+b_2\,j$ deux éléments de $\mathbf{Z}[j]$, où $a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2$ sont quatre entiers relatifs.

D'une part $z_1z_2=(a_1+b_1\,j)(a_2+b_2\,j)=a_1a_2+(a_1b_2+a_2b_1)j+b_1b_2\,j^2$
Mais $j^2=-1-j$. Ainsi : $z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1-b_1b_2)j$.

Les nombres $a_1a_2-b_1b_2$; $a_1b_2+a_2b_1-b_1b_2$ sont deux cocktails de sommes, différences et produits d'entiers relatifs, ce sont deux entiers relatifs : z_1z_2 appartient à $\mathbf{Z}[j]$.

D'autre part : $z_1^{\ 2}=\left(a_1^{\ 2}-b_1^{\ 2}\right)+\left(2\,a_1b_1-b_1^{\ 2}\right)j$ et $z_2^{\ 2}=\left(a_2^{\ 2}-b_2^{\ 2}\right)+\left(2\,a_2b_2-b_2^{\ 2}\right)j$.
Il en résulte que : $z_1^{\ 2}+z_2^{\ 2}=\left(a_1^{\ 2}-b_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}-b_2^{\ 2}\right)+\left(2\,a_1b_1-b_1^{\ 2}+2a_2b_2-b_2^{\ 2}\right)j$

Les nombres $\left(a_1^{\ 2}-b_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}-b_2^{\ 2}\right)$; $\left(2\,a_1b_1-b_1^{\ 2}+2a_2b_2-b_2^{\ 2}\right)$ sont deux cocktails de sommes, différences et produits d'entiers relatifs, ce sont deux entiers relatifs : $z_1^{\ 2}+z_2^{\ 2}$ appartient à $\mathbf{Z}[j]$.

$\mathbf{Z}[j]$ est stable par multiplication et par sommes de carrés, c'est un ensemble de type *S*.

1.3. Soit $z=a+b\,j=\left(a-\dfrac{b}{2}\right)+\dfrac{b\sqrt{3}}{2}i$, où a et b sont deux entiers relatifs, un élément de $\mathbf{Z}[j]$.

Alors $|z|^2=\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3b^2}{4}=a^2-a\,b+b^2$.

Il s'agit de faire l'inventaire des éléments de $\mathbf{Z}[j]$ dont le module est inférieur ou égal à 1.

Pour cela, intéressons-nous à l'expression : $m(a,b)=|z|^2-1=a^2-a\,b+b^2-1$. Il s'agit d'en étudier le signe.

Si on considère l'expression : $m(a,b)=|z|^2-1=a^2-ab+b^2-1$ comme une expression du second degré en a, son discriminant est $4-3b^2$.

Ce discriminant est strictement négatif pour tout entier b tel que $|b|\geq 2$. Cette condition est suffisante pour que $|z|^2-1>0$ c'est-à-dire pour que $|z|^2>1$.
Par contraposition, une condition nécessaire pour que $|z|^2\leq 1$ est que $|b|<2$, ce qui revient à dire, puisque b est un entier, que $|b|\leq 1$.

Lorsque $|b|\leq 1$: $m(a,b)=\left(a-\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{4-3b^2}}{2}\right)\left(a-\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{4-3b^2}}{2}\right)$.

- Si $b=0$ $m(a,0)=a^2-1$ et cette expression est négative ou nulle lorsque $a=0,\ 1\ ou\ -1$.
- Si $b=1$ $m(a,1)=a(a-1)$ et cette expression est négative ou nulle lorsque $a=0\ ou\ 1$.
- Si $b=-1$ $m(a,-1)=a(a+1)$ et cette expression est négative ou nulle lorsque $a=0\ ou\ -1$.

Nous obtenons ainsi sept éléments : $0\ ;\ 1\ ;\ -1\ ;\ j\ ;\ -j\ ;\ 1+j\ ;\ -1-j$ comme le prévoyait l'énoncé.

Concluons : $b(\mathbf{Z}[j])=7$

1.4. En ce qui concerne $Z[j]*$, ensemble des éléments non nuls de l'ensemble précédent :

Cet ensemble est clairement stable par multiplication.
En revanche, nous devons justifier que si $z_1=a_1+b_1 j$ et $z_2=a_2+b_2 j$ sont deux éléments non nuls de $\mathbf{Z}[j]$, alors $z_1^2+z_2^2$ est lui aussi non nul, ce résultat n'est pas acquis et nécessite une vérification.

Remarquons que : $z_1^2+z_2^2=0 \Leftrightarrow z_2=i\,z_1\ \ ou\ \ z_2=-i\,z_1$

Or, si $z=a+b\,j=\left(a-\frac{b}{2}\right)+\frac{b\sqrt{3}}{2}i$, alors : $i\,z=i(a+b\,j)=-\frac{b\sqrt{3}}{2}+\left(a-\frac{b}{2}\right)i$

Existe-t-il des entiers relatifs x et y tels que : $x+y\,j=i\,z=\left(x-\frac{y}{2}\right)+\frac{y\sqrt{3}}{2}i=-\frac{b\sqrt{3}}{2}+\left(a-\frac{b}{2}\right)i$ ou bien tels que $x+y\,j=\left(x-\frac{y}{2}\right)+\frac{y\sqrt{3}}{2}i=\frac{b\sqrt{3}}{2}+\left(-a+\frac{b}{2}\right)i$?

$$x+y\,j=-\frac{b\sqrt{3}}{2}+\left(a-\frac{b}{2}\right)i \Leftrightarrow \begin{cases} x-\dfrac{y}{2}=-\dfrac{b\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{y\sqrt{3}}{2}=a-\dfrac{b}{2} \end{cases}.$$

La résolution de ce système conduit à : $x=\frac{a-2b}{\sqrt{3}}\ ;\ y=\frac{2a-b}{\sqrt{3}}$.

De même : $x+y\,j=\frac{b\sqrt{3}}{2}+\left(-a+\frac{b}{2}\right)i \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{y}{2}=\frac{b\sqrt{3}}{2} \\ \frac{y\sqrt{3}}{2}=-a+\frac{b}{2} \end{cases}$ soit $x=\frac{-a+2b}{\sqrt{3}}$; $y=\frac{-2a+b}{\sqrt{3}}$

Le nombre $\sqrt{3}$ étant un irrationnel, les réels x et y ainsi obtenus ne peuvent être deux entiers relatifs que si $a-2b=2a-b=0$, donc que si $a=b=0$.

Si z est un complexe non nul, il est impossible que z ; $i\,z$ ou $-i\,z$ appartiennent en même temps à $Z[j]^*$. Il est donc impossible que la somme des carrés de deux éléments de $Z[j]^*$, dont on sait qu'elle appartient à $Z[j]$, soit égale à zéro.

En conséquence, si $z_1=a_1+b_1\,j$ et $z_2=a_2+b_2\,j$ sont deux éléments non nuls de $\mathbf{Z}[j]^*$, alors $z_1^{\,2}+z_2^{\,2}$ est lui aussi un élément de $\mathbf{Z}[j]^*$. Cet ensemble est stable par somme de carrés.

$\mathbf{Z}[j]^*=\mathbf{Z}[j]-\{0\}$ est de type S

Les éléments de module ≤ 1 de $\mathbf{Z}[j]^*=\mathbf{Z}[j]-\{0\}$ sont : 1 ; -1 ; j ; $-j$; $1+j$; $-1-j$ et $b(\mathbf{Z}[j]^*)=6$

Remarquons que les six éléments de module ≤ 1 de $\mathbf{Z}[j]^*=\mathbf{Z}[j]-\{0\}$ sont les six racines sixièmes de l'unité.

2. On définit la partie R de $\mathbf{C}$ par $R=\{z\in\mathbf{C},\ z^2\in\mathbf{Z}[j]\}$.
Ainsi un nombre complexe z est dans R si et seulement si son carré est dans $\mathbf{Z}[j]$.

2.1. Soient z_1 et z_2 deux éléments de R.
D'une part : $(z_1\,z_2)^2=(z_1^{\,2})(z_2^{\,2})$. L'ensemble $\mathbf{Z}[j]$ étant stable par multiplication, un produit de carrés d'éléments de $\mathbf{Z}[j]$ appartient à $\mathbf{Z}[j]$. Si z_1 et z_2 deux éléments de R., leur produit $(z_1\,z_2)$ a pour carré un élément de $\mathbf{Z}[j]$, ce produit appartient à R.
R est stable pour la multiplication.

D'autre part : $\left(z_1^{\,2}+z_2^{\,2}\right)^2=z_1^{\,4}+z_2^{\,4}+2\,z_1^{\,2}\,z_2^{\,2}$. L'ensemble $\mathbf{Z}[j]$ étant stable par multiplications (donc par élévation aux puissances 2 et 4) et par additions, ce cocktail appartient à $\mathbf{Z}[j]$.
Si z_1 et z_2 deux éléments de R., le carré de la somme de leurs carrés appartient à $\mathbf{Z}[j]$ et par conséquent la somme de leurs carrés appartient à R.
R est stable par somme de carrés.

R est de type S.

2.2. Les racines carrées des éléments de $\mathbf{Z}[j]$ de module inférieur ou égal à 1 sont par définition dans R et ont un module inférieur ou égal à 1 et réciproquement, si z est un élément de R de module inférieur ou égal à 1, son carré appartient à $\mathbf{Z}[j]$ et a un module inférieur ou égal à 1.

En d'autres termes, on obtient les éléments de R de module inférieur ou égal à 1 en cherchant les racines carrées des éléments de $\mathbf{Z}[j]$ de module inférieur ou égal à 1. Nous sommes amenés en particulier à chercher les racines carrées des racines sixièmes de l'unité.

En voici l'inventaire, il s'agit outre 0 des douze racines douzièmes de l'unité :

$0\ ;\ \pm 1\ ;\ \pm i\ ;\ \pm\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ ;\ \pm\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\ ;\ \pm\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\ ;\ \pm\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$. Ainsi, $b(R)=13$

On peut remarquer au passage que, contrairement à $\mathbf{Z}[j]^*$, R^* n'est pas de type S. En effet, R^* contient i et contient 1, mais la somme de leurs carrés est nulle : $(i)^2+1^2=0$ donc n'est pas dans R^*. R^* n'est pas stable pour la somme de carrés.

Partie C : À la recherche des valeurs possibles de $b(A)$

1. Pour tout élément a d'un ensemble A de type S la suite $\left(a^n\right)_{n\in N^*}$ est une suite d'éléments de S. En effet : $a^2=a\times a$ appartient à A en tant que produit de deux éléments de A et ce résultat se généralise :

- $a=a^1$ appartient à A.
- Si on suppose que, pour un entier $n\in N^*$, a^n appartient à S alors : $a^{n+1}=a\times a^n$ appartient à S en tant que produit de deux éléments de A : $a^n\in A\Rightarrow a^{n+1}\in A$

Ainsi, a^n appartient à A pour tout entier $n\in N^*$

Si a est tel que $0<|a|<1$, les termes de cette suite ont des modules distincts et compris entre 0 et 1. On construit ainsi une suite infinie d'éléments distincts de A de modules compris entre 0 et 1.

Si un ensemble de type S contient un élément a est tel que $0<|a|<1$, alors $b(A)=\infty$.

2. On sait que de façon générale pour tous réels u et v : $\mathbf{e}^{iu}+\mathbf{e}^{iv}=2\cos\left(\frac{u-v}{2}\right).\mathbf{e}^{i\left(\frac{u+v}{2}\right)}$.

Ce complexe a pour module : $\left|\mathbf{e}^{iu}+\mathbf{e}^{iv}\right|=2\left|\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)\right|$.

Dans le même ordre d'idées : $\left(\mathbf{e}^{iu}\right)^2+\left(\mathbf{e}^{iv}\right)^2=\mathbf{e}^{2iu}+\mathbf{e}^{2iv}=2\cos(u-v).\mathbf{e}^{i(u+v)}$

Ce complexe a pour module : $\left|\mathbf{e}^{2iu}+\mathbf{e}^{2iv}\right|=2\left|\cos(u-v)\right|$

En particulier : $\mathbf{e}^{2iu}+\mathbf{e}^{4iu}=2\cos(u).\mathbf{e}^{i(3u)}$ et $\mathbf{e}^{4iu}+\mathbf{e}^{8iu}=2\cos(2u).\mathbf{e}^{i(6u)}$

2.1. Soit a un complexe de module 1 et notons $u = \arg(a)$ celui des arguments de a qui appartient à $]-\pi, \pi]$.
Supposons d'abord que $\frac{\pi}{6} < u < \frac{2\pi}{3}$ et que u ne soit ni un multiple de $\frac{\pi}{4}$ ni un multiple de $\frac{\pi}{6}$ ce qui exclut les valeurs $\left\{\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{2}\right\}$

- Ou bien $u \in \left]\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2} ; \frac{2\pi}{3}\right[$ auquel cas $0 < |\cos(u)| < \frac{1}{2}$
- Ou bien $u \in \left]\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{3}\right[$ auquel cas $2u \in \left]\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2} ; \frac{2\pi}{3}\right[$ et $0 < |\cos(2u)| < \frac{1}{2}$

Quel que soit le cas de figure, il existe un des deux nombres $\mathbf{e}^{2iu} + \mathbf{e}^{4iu} = 2\cos(u).\mathbf{e}^{i(3u)}$ ou $\mathbf{e}^{4iu} + \mathbf{e}^{8iu} = 2\cos(2u).\mathbf{e}^{i(6u)}$ dont le module est non nul et strictement inférieur à 1.

L'un des deux entiers 1 ou 2 est tel que $0 < \left|a^{2n} + a^{4n}\right| < 1$.

2.2. Supposons que $0 < u < \frac{\pi}{6}$ et soit n_0 le plus petit entier tel que : $\frac{\pi}{6} < n_0\, u$

La double inégalité $0 < u < \frac{\pi}{6}$ implique que $0 < 3u < \frac{\pi}{2}$.

Ainsi : $\frac{\pi}{6} < n_0\, u < (n_0+1)u < (n_0+2)u < (n_0+3)u < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$.

On obtient quatre multiples de u situés entre $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{2\pi}{3}$. Au moins un des quatre n'appartient pas à $\left\{\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{2}\right\}$.

On peut appliquer avec ce multiple $n_1\, u$ la question précédente. Il existe un des deux nombres $\mathbf{e}^{2in_1u} + \mathbf{e}^{4in_1u} = 2\cos(n_1u).\mathbf{e}^{i(3n_1u)}$ ou bien $\mathbf{e}^{4in_1u} + \mathbf{e}^{8in_1u} = 2\cos(2n_1u).\mathbf{e}^{i(6n_1u)}$ dont le module est non nul et strictement inférieur à 1.

Il existe un entier n, $n = n_1$ ou $n = 2n_1$, tel que $0 < \left|a^{2n} + a^{4n}\right| < 1$.

2.3. Si un élément de A a un argument appartenant à $\left]-\frac{2\pi}{3} ; 0\right[$ son conjugué appartient à $\overline{A}$ et a un argument appartenant à $\left]0 ; \frac{2\pi}{3}\right[$. On se ramène ainsi aux cas précédents. Il existe un entier n tel que $0 < \left|a^{2n} + a^{4n}\right| < 1$.

2.4. Pour inventorier tous les cas de figure, il reste à étudier le cas $\frac{2\pi}{3} < \arg(a) < \pi$ où $\arg(a)$ est un réel distinct de $\frac{5\pi}{6}$ et de $\frac{3\pi}{4}$ (le cas $-\frac{2\pi}{3} > \arg(a) > -\pi$ s'y ramènera par conjugaison). Dans ce cas, on peut considérer le nombre a^2, dont l'argument situé entre $]-\pi, +\pi]$ est tel que $-\frac{2\pi}{3} < \arg(a^2) < 0$, ce qui ramène à un cas précédent

Si A contient un complexe a de module 1 et dont le module n'est ni multiple de $\frac{\pi}{6}$ ni multiple de $\frac{\pi}{4}$, les puissances n et $2n$ de ce complexe a appartiennent à A et la somme de leurs carrés appartient à A.
Dans tous les cas étudiés, A contient un élément de la forme : $b = a^{2n} + a^{4n}$ dont le module est non nul et strictement inférieur à 1. $b(A) = \infty$.

3.1. Si $b(A) \geq 2$, il existe au moins un élément de A non nul et dont le module est inférieur ou égal à 1. Le module de cet élément n'est pas strictement inférieur à 1, sinon on aurait $b(A) = \infty$. Il existe au moins un élément de A dont le module est exactement égal à 1.

3.2. L'argument situé dans $]-\pi, +\pi]$ d'un nombre appartenant à A et dont le module est exactement égal à 1 est nécessairement l'un des cas d'exception. On relève comme cas d'exception les multiples de $\frac{\pi}{6}$:
$\left\{0\ ;\ \frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{2\pi}{3}\ ;\ \frac{5\pi}{6}\ ;\ \pi\ ;\ \frac{7\pi}{6}\ ;\ \frac{4\pi}{3}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\ ;\ \frac{5\pi}{3}\ ;\ \frac{11\pi}{6}\right\}$ (12 éléments) ainsi que les multiples de $\frac{\pi}{4}$:
$\left\{0\ ;\ \frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\ ;\ \pi\ ;\ \frac{5\pi}{4}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\ ;\ \frac{7\pi}{4}\right\}$ (8 éléments)
La réunion de ces deux ensembles est un ensemble à 16 éléments :
$\left\{0\ ;\ \frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{2\pi}{3}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\ ;\ \frac{5\pi}{6}\ ;\ \pi\ ;\ \frac{7\pi}{6}\ ;\ \frac{5\pi}{4}\ ;\ \frac{4\pi}{3}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\ ;\ \frac{5\pi}{3}\ ;\ \frac{7\pi}{4}\ ;\ \frac{11\pi}{6}\right\}$

Dans un ensemble A de type S, il y a au plus 16 éléments dont le module est exactement égal à 1. Si nous ajoutons le nombre zéro, nous arrivons au total maximal de 17 éléments de module inférieur ou égal à 1.

4. Considérons l'ensemble $\mathbf{Z}[i] = \{a + bi\ ;\ (a, b) \in \mathbf{Z}^2\}$.

Soient $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$ deux éléments de $\mathbf{Z}[i]$, où a_1, b_1, a_2, b_2 sont quatre entiers relatifs.

D'une part $z_1 z_2 = (a_1 + b_1 j)(a_2 + b_2 j) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$, élément de $\mathbf{Z}[i]$.

D'autre part : $z_1^2 = (a_1^2 - b_1^2) + (2 a_1 b_1) i$ et $z_2^2 = (a_2^2 - b_2^2) + (2 a_2 b_2) i$.
Il en résulte que : $z_1^2 + z_2^2 = (a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2) + (2 a_1 b_1 + 2 a_2 b_2) i$

Les nombres $(a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2)$; $(2 a_1 b_1 + 2 a_2 b_2)$ sont deux cocktails de sommes, différences et produits d'entiers relatifs, ce sont deux entiers relatifs : $z_1^2 + z_2^2$ appartient à $\mathbf{Z}[i]$.

Il s'agit d'un ensemble de type S.

Le sous-ensemble des cinq éléments de module inférieur ou égal à 1 étant $\{0,\ 1,\ -1,\ i,\ -i\}$, $b(\mathbf{Z}[i]) = 5$.
Noter que l'ensemble étoilé $\mathbf{Z}[i]^* = \{a + b\,i\ ;\ (a,\ b) \in \mathbf{Z}^2\} - \{0\}$ n'est pas de type S, n'étant pas stable par somme de carrés (vu qu'il contient par exemple 1 et i dont la somme des carrés est nulle).

5. Considérons l'ensemble R' des nombres dont le carré appartient à $\mathbf{Z}[i]$. De la même manière que dans la question **A2**, on établit qu'il s'agit d'un ensemble de type S et que les éléments de module inférieur ou égal à 1 sont les racines carrées des éléments de $\{0,\ 1,\ -1,\ i,\ -i\}$, c'est-à-dire qu'il s'agit des éléments de l'ensemble : $\left\{0,\ \pm 1,\ \pm i,\ \pm \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}},\ \pm \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}\right\}$. $b(R') = 9$

Quant à l'ensemble étoilé correspondant, il n'est pas de type S, n'étant pas stable par somme de carrés.

On a ainsi au fil des questions déjà traitées fait le tour des ensembles de type S qui contiennent un complexe de module 1 et d'argument ou bien un multiple de $\dfrac{\pi}{4}$ ou bien un multiple de $\dfrac{\pi}{6}$.

Il reste à voir ce qu'il se passe si un ensemble A de type S contient <u>*en même temps*</u> un complexe de module 1 et d'argument un multiple de $\dfrac{\pi}{4}$ et un autre de module 1 et d'argument un multiple de $\dfrac{\pi}{6}$. Contient-il ou non dans ce cas un nombre complexe de module strictement inférieur à 1 ?

Examinons un ensemble de type S contenant à la fois $\mathbf{e}^{i\pi/4}$; $\mathbf{e}^{i\pi/3}$. Dans ce cas, il contient leurs puissances $\mathbf{e}^{in\pi/4}$; $\mathbf{e}^{im\pi/3}$ et les sommes des carrés de leurs puissances $\left(\mathbf{e}^{in\pi/4}\right)^2 + \left(\mathbf{e}^{im\pi/3}\right)^2 = \mathbf{e}^{in\pi/2} + \mathbf{e}^{i2m\pi/3} = 2\cos\left(\dfrac{n\pi}{4} - \dfrac{m\pi}{3}\right)\mathbf{e}^{i(n\pi/4)+m\pi/3}$.

Or $\dfrac{n\pi}{4} - \dfrac{m\pi}{3} = (3n - 4m)\dfrac{\pi}{12}$.

Les entiers 3 et 4 étant premiers entre eux, il existe des entiers n et m tels que $3n - 4m = 1$ (relation de Bézout).

$\cos(3 \times (5\,n) - 4 \times (5m))\dfrac{\pi}{12} = \cos\dfrac{5\pi}{12}$ de sorte que $0 < \left|\cos(3 \times (5\,n) - 4 \times (5\,m))\dfrac{\pi}{12}\right| < \dfrac{1}{2}$.

L'ensemble A contient au moins un élément dont le module est strictement compris entre 0 et 1.

Concluons que, si un ensemble A de type S contient <u>*en même temps*</u> un complexe de module 1 et d'argument un multiple de $\dfrac{\pi}{4}$ et un autre de module 1 et d'argument un multiple de $\dfrac{\pi}{6}$, alors $b(A) = \infty$.

Les valeurs finies possibles de $b(A)$ sont 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9 et 13.

Problème 2 : C'est probablement bon

Partie A : Franck passe un premier examen

Franck connaît les réponses des six premières questions. Il lui manque un point pour réussir l'examen. Il doit répondre à au moins une des questions dont il ne connaît pas la réponse.

Pour $1 \le i \le 4$, désignons par B_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la réponse à la question numéro $6+i$ est exacte et zéro sinon. Cette variable aléatoire suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Désignons par k le nombre de questions à réponse inconnue auxquelles Franck décide de répondre ($1 \le k \le 4$).

Désignons par X_k le nombre de réponses exactes obtenues par Franck parmi les k questions à réponse inconnue auxquelles il répond. C'est-à-dire que $X_k = \sum_{i=1}^{i=k} B_i$. Cette variable aléatoire suit la loi binomiale $B(k,\ p)$.

Le nombre Y_k de points obtenus par Franck à son examen dans ces conditions est lié à X_k par la relation : $Y_k = 6 + (2X_k - k)$

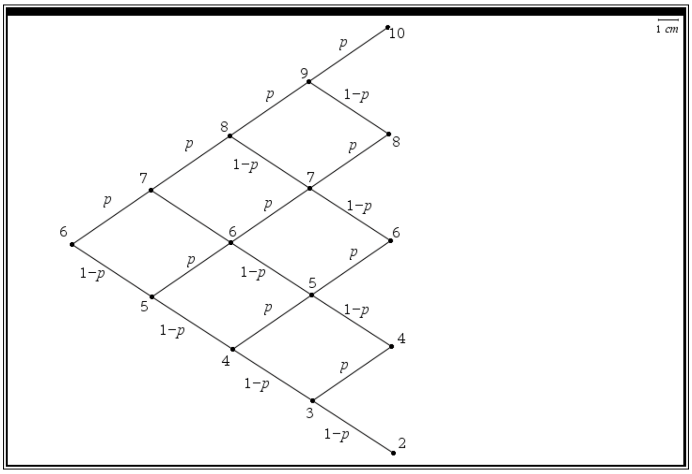
Soit S_k l'évènement : « Franck réussit son examen en répondant à k questions à réponse inconnue » (avec $1 \le k \le 4$).

Franck réussit son examen si et seulement si $Y_k \ge 7$, c'est-à-dire si et seulement si $2X_k - k \ge 1$ ou, ce qui revient au même, si et seulement si $X_k \ge \frac{k+1}{2}$.

L'évènement S_k est l'évènement : $S_k = [Y_k \ge 7] = \left[X_k \ge \frac{k+1}{2}\right]$

Sa probabilité est : $P_k = P\left(\left[X_k \ge \frac{k+1}{2}\right]\right)$

Le diagramme en arbre ci-contre décrit le déroulement possible de ce premier examen, dans le cas où Franck répond à toutes les questions.



1. $P_1 = P([X_1 = 1]) = p$ et $P_2 = P\left(\left[X_2 \geq \frac{3}{2}\right]\right) = P([X_2 = 2]) = p^2$

Or : $0 < p < 1 \Rightarrow 0 < p^2 < p$, c'est-à-dire que $P_2 < P_1$ quelle que soit la valeur de *p*.

Si Franck ne souhaite pas répondre à la question numéro 9, il n'a aucun intérêt à répondre à la question numéro 8.

2. $P_3 = P([X_3 \geq 2]) = P([X_3 = 2] \cup [X_3 = 3])$

$P_3 = p^3 + 3p^2(1-p)$

$P_4 = P\left(\left[X_4 \geq \frac{5}{2}\right]\right) = P([X_4 \geq 3]) = P([X_4 = 3] \cup [X_3 = 4])$

$P_4 = p^4 + 4p^3(1-p)$

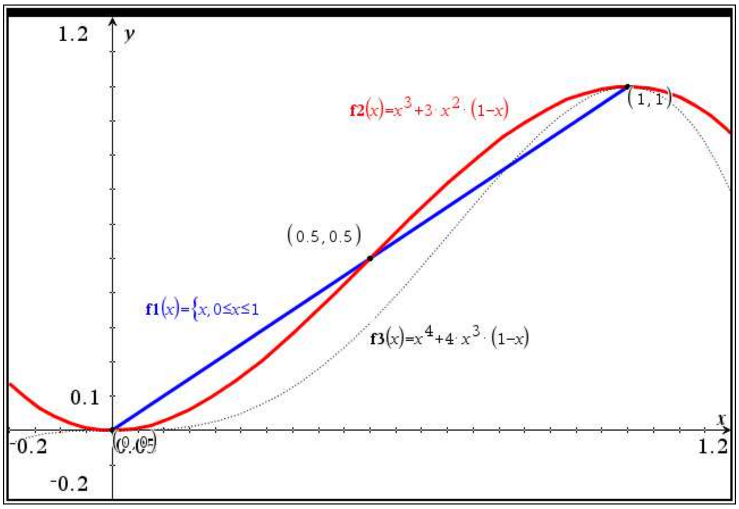
$P_3 - P_4 = [p^3 + 3p^2(1-p)] - [p^4 + 4p^3(1-p)] = 3p^2(1-p)^2$.

Cette différence est strictement positive quelle que soit la valeur de *p* vérifiant $0 < p < 1$.

La probabilité de réussir l'examen en répondant à 9 questions est strictement supérieure à la probabilité de réussir l'examen en répondant à 10 questions : Franck n'a aucun intérêt à répondre à la question 10.

3. Deux stratégies rivalisent : répondre à la question 7 et s'en tenir là ou répondre à 9 questions dont trois à réponse inconnue.

Une étude graphique fait apparaître que si $0 < p < \frac{1}{2}$, Franck a intérêt à répondre à 7 questions exactement et s'en tenir là.
Si $\frac{1}{2} < p < 1$, Franck a intérêt à répondre à 9 questions exactement.
Si $p = \frac{1}{2}$, les deux stratégies donnent la même probabilité de réussite.



Une étude du signe de $P_1 - P_3 = p - [p^3 + 3p^2(1-p)]$ aboutirait à la même conclusion.

En effet :
$p - [p^3 + 3p^2(1-p)] = p(1-p)(1-2p)$,
cette différence est du signe de $1 - 2p$

Partie B : Franck passe un deuxième examen

Comme dans la partie précédente, il manque un point à Franck pour réussir son examen. Pour cela, il doit obtenir un nombre de réponses exactes strictement supérieur au nombre de réponses inexactes à celles des questions à réponse inconnue auxquelles il décide de répondre.

Reprenons des notations analogues à celles de la partie précédente.

Pour $1 \leq i \leq 26$, désignons par B_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la réponse à la question numéro $24+i$ est exacte et zéro sinon. Cette variable aléatoire suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Désignons par k le nombre de questions à réponse inconnue auxquelles Franck décide de répondre ($1 \leq k \leq 26$).

Désignons par X_k le nombre de réponses exactes obtenues par Franck parmi les k questions à réponse inconnue auxquelles il répond. C'est-à-dire que $X_k = \sum_{i=1}^{i=k} B_i$. Cette variable aléatoire suit la loi binomiale $B(k,\ p)$.

Le nombre Y_k de points obtenus par Franck à son examen dans ces conditions est lié à X_k par la relation : $Y_k = 24 + (2X_k - k)$

Soit S_k l'évènement : « Franck réussit son examen en répondant à k questions à réponse inconnue ».

Franck réussit son examen si et seulement si $Y_k \geq 25$, c'est-à-dire si et seulement si $2X_k - k \geq 1$ ou, ce qui revient au même, $X_k \geq \dfrac{k+1}{2}$.

L'évènement S_k est l'évènement : $S_k = [Y_k \geq 25] = \left[X_k \geq \dfrac{k+1}{2}\right]$

Sa probabilité est : $P_k = P\left(\left[X_k \geq \dfrac{k+1}{2}\right]\right)$

1. La condition $1 \leq k \leq 13$ assure que $1 \leq 2k-1 < 2k \leq 26$ c'est-à-dire que l'indexation des P_{2k-1} et des P_{2k} est toujours entre 1 et 26.

Nous devons comparer $P_{2k-1} = P\left(\left[X_{2k-1} \geq \dfrac{(2k-1)+1}{2}\right]\right)$ et $P_{2k} = P\left(\left[X_{2k} \geq \dfrac{2k+1}{2}\right]\right)$

Or $\dfrac{(2k-1)+1}{2} = k$ et $\dfrac{2k+1}{2} = k + \dfrac{1}{2}$. Le nombre de réponses exactes étant nécessairement un entier :

$$X_{2k-1} \geq \frac{(2k-1)+1}{2} \Leftrightarrow X_{2k-1} \geq k \text{ tandis que } X_{2k} \geq \frac{2k+1}{2} \Leftrightarrow X_{2k} \geq k+1$$

En conséquence, $P_{2k-1} = P([X_{2k-1} \geq k])$ tandis que $P_{2k} = P([X_{2k} \geq k+1])$

Compte tenu que $X_{2k} = X_{2k-1} + B_{2k}$ et que B_{2k} ne prend que les valeurs 0 ou 1, l'inégalité $X_{2k} \geq k+1$ implique l'inégalité : $X_{2k-1} \geq k$.

L'évènement $[X_{2k} \geq k+1]$ est inclus dans l'évènement $[X_{2k-1} \geq k]$.

L'inclusion est stricte car l'évènement $([X_{2k-1} \geq k]) \cap ([B_{2k} = 0])$ est inclus dans $[X_{2k-1} \geq k]$ mais ne l'est pas dans $[X_{2k} \geq k+1]$.

Par conséquent la probabilité de $[X_{2k} \geq k+1]$ est strictement inférieure à celle de $[X_{2k-1} \geq k]$.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq 13$, $P_{2k} < P_{2k-1}$.

Franck n'a aucun intérêt à répondre à un nombre pair de questions à réponse inconnue.

2. La condition $0 \leq k \leq 12$ assure que $1 \leq 2k+1 \leq 25$ c'est-à-dire que l'indexation des P_{2k+1} est toujours entre 1 et 25.

$$P_{2k+1} = P\left(\left[X_{2k+1} \geq \frac{(2k+1)+1}{2}\right]\right) = P([X_{2k+1} \geq k+1])$$

L'évènement $[X_{2k+1} \geq k+1]$ s'exprime comme une réunion d'évènements disjoints :

$$[X_{2k+1} \geq k+1] = \bigcup_{i=k+1}^{i=2k+1} [X_{2k+1} = i].$$

La probabilité de cette réunion est la somme des probabilités de chacun de ces évènements ainsi réunis.

Compte tenu que la variable aléatoire X_{2k+1} suit la loi binomiale $B(2k+1, p)$, la probabilité que cette variable prenne la valeur i est $\binom{2k+1}{i} p^i (1-p)^{2k+1-i}$

$$P_{2k+1} = P\left(\bigcup_{i=k+1}^{i=2k+1} [X_{2k+1} = i]\right) = \sum_{i=k+1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} p^i (1-p)^{2k+1-i}$$

3. La condition $0 \leq k \leq 11$ assure que $1 \leq 2k+1 < 2k+3 \leq 25$ c'est-à-dire que l'indexation des P_{2k+1} et des P_{2k+3} est toujours entre 1 et 25.

Comme on l'a vu ci-dessus :

$$P_{2k+1} = P\left(\left[X_{2k+1} \geq \frac{(2k+1)+1}{2}\right]\right) = P([X_{2k+1} \geq k+1]).$$

De même : $P_{2k+3} = P\left(\left[X_{2k+3} \geq \frac{(2k+3)+1}{2}\right]\right) = P([X_{2k+3} \geq k+2])$

L'évènement $[X_{2k+1} \geq k+1]$ se décompose ainsi : $[X_{2k+1} \geq k+1] = [X_{2k+1} \geq k+2] \cup [X_{2k+1} = k+2]$ en deux évènements d'intersection vide, de sorte que :

$$P_{2k+1} = P([X_{2k+1} \geq k+2]) + \binom{2k+1}{k+1} p^{k+1}(1-p)^k$$

L'évènement $[X_{2k+3} \geq k+2]$ se décompose en une réunion de trois évènements disjoints :

$$[X_{2k+1} \geq k+2] \cup ([X_{2k+1} = k+1] \cap ([B_{2k+2} = 1] \cup [B_{2k+3} = 1])) \cup ([X_{2k+1} = k] \cap ([B_{2k+2} = 1] \cap [B_{2k+3} = 1]))$$

En effet, pour que $X_{2k+3} \geq k+2$, il faut, au cours des $2k+1$ premières questions à réponse inconnue, ou bien que $k+2$ bonnes réponses aient déjà été données ou bien que $k+1$ bonnes réponses aient déjà été données et ensuite au moins une de plus aux questions numéros $2k+2$ ou $2k+3$, ou bien que k bonnes réponses aient déjà été données et ensuite deux de plus aux questions numéros $2k+2$ ou $2k+3$.

Or : $P([B_{2k+2} = 1] \cup [B_{2k+3} = 1]) = 2p - p^2$ d'après la formule donnant la probabilité d'une réunion, chacun des deux évènements ayant pour probabilité p et leur intersection ayant pour probabilité p^2 puisque les questions à réponse inconnue sont supposées indépendantes.

Il en résulte que :

$$P_{2k+3} = P[X_{2k+1} \geq k+2] + \binom{2k+1}{k+1} p^{k+1}(1-p)^k \times (2p - p^2) + \binom{2k+1}{k} p^k (1-p)^{k+1} \times p^2$$

Par symétrie des coefficients binomiaux : $\binom{2k+1}{k+1} = \binom{2k+1}{k}$.

$$P_{2k+3} = P([X_{2k+1} \geq k+2]) + \binom{2k+1}{k+1} p^k (1-p)^k \times (3p^2 - 2p^3)$$

$$P_{2k+3} - P_{2k+1} = \binom{2k+1}{k+1} p^k (1-p)^k (3p^2 - 2p^3 - p) = \binom{2k+1}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{k+1} \times (2p-1)$$

4. Cette différence est du signe de $2p-1$.

- Si $p > \frac{1}{2}$ alors la suite $(P_{2k+1})_{0 \leq k \leq 12}$ est croissante ; Franck a intérêt à répondre à toutes les questions jusqu'à la question numéro 49.
- Si $p = \frac{1}{2}$ alors la suite $(P_{2k+1})_{1 \leq k \leq 12}$ est stationnaire, il n'y a pas de stratégie meilleure qu'une autre.
- Si $p < \frac{1}{2}$ alors la suite $(P_{2k+1})_{0 \leq k \leq 12}$ est décroissante, Franck a intérêt à répondre à la question numéro 25 et en s'en tenir là.

Problème 3 : Triangles entiers

Partie A : Quelques résultats préliminaires

1.1. Le point H est un point de la droite (BC) c'est-à-dire qu'il existe un réel λ tel que : $\overrightarrow{BH} = \lambda.\overrightarrow{BC}$.

D'autre part, H étant le pied de la hauteur issue de A, le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BC}$, ce qui peut se traduire par la relation : $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$.

Or, $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}\right)\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AB} + \lambda.\overrightarrow{BC}\right)\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \lambda.BC^2$

Le triangle ABC étant « non aplati », les points B et C sont distincts et BC est non nul.

$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \lambda.BC^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}}{BC^2} = \dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BC^2}$

La position de H sur (BC) est déterminée par la relation vectorielle : $\overrightarrow{BH} = \left(\dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BC^2}\right)\overrightarrow{BC}$ ou, ce qui revient au même, par la relation : $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} + \left(\dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BC^2}\right)\overrightarrow{BC}$

1.2. Les coordonnées de H sont déterminées par la relation vectorielle précédente.
Les points A, B, C étant à coordonnées entières, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et BC^2 sont des nombres entiers. Les coordonnées de H sont des cocktails (mélanges de sommes, différences, produits, quotients) de nombres entiers, cas particuliers de nombres rationnels. Conformément à la structure de corps de l'ensemble $\mathbf{Q}$, ces coordonnées sont rationnelles.

1.3. Bien sûr.

2. Soit ABC un triangle du plan, isocèle de sommet A.

Le nombre $\sin B\hat{A}C = \dfrac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right|}{AB.AC} = \dfrac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right|}{AB^2}$ s'exprime en fonction des coordonnées des points A, B, C dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}\right)$: $\sin B\hat{A}C = \dfrac{\left|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)\right|}{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Si A, B, C sont des points à coordonnées rationnelles, ce sinus est un nombre rationnel, car cocktail de nombres rationnels.

Ce sinus est nécessairement distinct de $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, qui est un nombre irrationnel. L'angle géométrique de sommet A ne peut avoir pour mesure $\dfrac{\pi}{3}$. Un triangle ABC du plan dont tous les sommets sont à coordonnées rationnelles ne peut pas être équilatéral. À plus forte raison si tous les sommets sont à coordonnées entières, qui sont des cas particuliers de rationnels.

3. Supposons que $\sqrt{n}$ soit un nombre rationnel ; il peut s'écrire : $\sqrt{n} = \dfrac{a}{b}$ où a et b sont des entiers premiers entre eux.
S'il en est ainsi : $b^2\, n = a^2$. L'entier b^2 divise a^2. Donc b divise a.

Il existe un entier m : $a = mb$ et par suite $\sqrt{n} = m$

Rappelons à ce propos un lemme justifiant si besoin est ce que nous venons de dire :

« Soient a et b deux entiers ; l'entier b^2 divise a^2 si et seulement si b divise a. »

En effet, si b divise a alors il existe un entier q tel que $a = qb$. Alors : $a^2 = q^2\, b^2$ et b^2 divise a^2

Réciproquement supposons que b^2 divise a^2 :
Pour tout nombre premier p divisant b, si p^{β} est le facteur premier relatif à p de la décomposition de b en produit de facteurs premiers et si p^{α} est le facteur premier relatif à p de la décomposition de a. $p^{2\beta}$ et $p^{2\alpha}$ sont ceux relatifs à p des décompositions de b^2 et de a^2 : il existe des entiers b' et a' dépourvus du facteur premier p tels que : $b^2 = p^{2\beta}.b'$; $a^2 = p^{2\alpha}.a'$

Sachant que b^2 divise a^2 : $p^{2\beta}$ divise $p^{2\alpha}.a'$ et étant premier avec a', il divise $p^{2\alpha}$.
Donc $2\beta \le 2\alpha$ ce qui revient à dire que $\beta \le \alpha$.

Les exposants de tous les facteurs premiers de la décomposition de b en produit de facteurs premiers sont inférieurs ou égaux aux exposants des mêmes facteurs de la décomposition de a en produit de facteurs premiers ; l'entier b divise a.

4.1. *Raisonnement par disjonction de cas*

Si x est un entier impair, de la forme $x = 2k+1$, alors $x^2 = 1 + 4k + 4k^2 = 1 + 4k(k+1)$. Les entiers k et $k+1$ sont deux entiers consécutifs, l'un des deux est un entier pair et le nombre $t = \dfrac{k(k+1)}{2}$ est un entier.
$x^2 = 1 + 8\dfrac{k(k+1)}{2} = 1 + 8t$.

Si x est un entier pair, il s'agit soit d'un multiple de 4, nombre de la forme $x = 4k$, soit d'un nombre de la forme $x = 2 + 4k$.

- Si x est de la forme $x = 4k$, alors $x^2 = 16k^2 = 8t$ en posant $t = 2k^2$
- Si x est de la forme $x = 2 + 4k$ alors $x^2 = 4 + 16k + 16k^2 = 4 + 8t$ en posant $t = 2k + 2k^2$

En résumé :

- Si x est impair, il existe un entier t tel que $x^2 = 1 + 8t$.
- Si x est un multiple de 4, il existe un entier t tel que $x^2 = 8t$.
- Si x est de la forme $x = 2 + 4k$ alors il existe un entier t tel que $x^2 = 4 + 8t$.

4.2. *L'usage d'une congruence modulo 8 permet un raisonnement plus « léger ».*

Supposons qu'il existe quatre entiers non tous nuls tels que : $7a^2 = b^2 + c^2 + d^2$.

D'après la question précédente :

- Si a est un nombre impair, alors $7a^2 \equiv 7 \quad (8)$.
- Si a est un multiple de 4, alors $7a^2 \equiv 0 \quad (8)$
- Si a est de la forme $x = 2 + 4k$ alors $7a^2 \equiv 4 \quad (8)$

Quant à la somme de trois carrés, elle est congrue modulo 8 à l'une ou l'autre des combinaisons suivantes :
$0+0+0$; $0+0+1$; $0+0+4$; $0+1+1$; $0+1+4$; $0+4+4$; $1+1+1$; $1+1+4$; $1+4+4$; $4+4+4$
c'est-à-dire à 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

La congruence $7a^2 \equiv b^2 + c^2 + d^2 \quad (8)$ est impossible si a est impair.
Elle est impossible également si au moins un des trois entiers *b, c* ou *d* est impair, car alors $b^2 + c^2 + d^2$ est congru à 1, 2, 3, 5 ou 6 mais jamais à 0, 4 ou 7.

Les quatre entiers *a, b, c, d* sont tous des nombres pairs. Dans ce cas, $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}, \frac{d}{2}$ sont eux aussi des entiers qui ont les mêmes propriétés que *a, b, c, d* : $7\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$

On réitère ce raisonnement de « descente infinie » tant que la division par 2 de tous les entiers *a, b, c, d* aboutit à un quadruplet d'entiers tous pairs.

Au bout d'un nombre fini d'itérations, on obtiendra nécessairement un quadruplet $\frac{a}{2^n}, \frac{b}{2^n}, \frac{c}{2^n}, \frac{d}{2^n}$ d'entiers où l'un des entiers au moins sera impair ce qui amène à une contradiction.

La relation $7a^2 = b^2 + c^2 + d^2$ implique la nullité des quatre entiers.

Partie B : Triangles de l'espace à sommets entiers

1. Le triangle de sommets $A(1,\ 0,\ 0)$; $B(0,\ 1,\ 0)$ et $C(0,\ 0,\ 1)$

2.1. Soit *ABC* un triangle dont les trois sommets sont des points entiers.

Intéressons nous par exemple à l'angle $\widehat{ABC}$. S'il est non droit, le pied *H* de la hauteur issue de *A* est distinct du sommet *B* du triangle et $\tan^2 \widehat{ABC} = \dfrac{AH^2}{BH^2}$

Mais les points *A, B, C* ont des coordonnées entières et *H* a des coordonnées rationnelles. En tant que cocktails de nombres rationnels, les carrés des distances AH^2 et BH^2 sont des nombres rationnels et en tant que quotient de rationnels, $\tan^2 \widehat{ABC} = \dfrac{AH^2}{BH^2}$ est un rationnel.
En appliquant un raisonnement analogue avec les deux autres angles, on montre que le carré de la tangente de tout angle non droit du triangle *ABC* est un rationnel.

2.2. *Rappelons un lemme :*

« Soit N un entier strictement positif. Il existe r et k uniques tels que $\sqrt{N} = r\sqrt{k}$ *, r et k entiers et k sans facteur carré. »*

En effet, considérons la décomposition de *N* en facteurs premiers.

On peut classer en deux catégories ces facteurs premiers : $p_1,\ p_2,\dots,p_j$ sont les facteurs premiers affectés d'exposants impairs, $p_{j+1},\dots,p_k$ ceux affectés d'exposants pairs : $N = p_1^{2\alpha_1+1}\dots p_j^{2\alpha_j+1}p_{j+1}^{2\alpha_{1+1}}\dots p_k^{2\alpha_k}$. (Si une des deux catégories est absente, le facteur correspondant dans ce produit est remplacé par 1).

Alors : $N = \left(p_1^{2\alpha_1}\dots p_j^{2\alpha_j}p_{j+1}^{2\alpha_{1+1}}\dots p_k^{2\alpha_k}\right)\times\left(p_1\dots p_j\right) = \left(p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}\right)^2\times\left(p_1\dots p_j\right)$ est le produit d'un carré et d'un entier sans facteur carré.

On obtient $\sqrt{N} = r\sqrt{k}$ avec $r = \left(p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}\right)$ et $k = p_1\dots p_j$ produit de nombres premiers sans facteur carré.

L'unicité de la décomposition en facteurs premiers d'un entier assure de plus l'unicité de cette décomposition.

Et un corollaire :

« Soit un rationnel strictement positif. Sa racine carrée est le produit d'un rationnel et de la racine carrée d'un entier sans facteur entier. »

En effet, soit un nombre rationnel strictement positif $\frac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers strictement positifs premiers entre eux. Appliquons le résultat précédent aux entiers a et b : $\frac{a}{b} = \frac{(a')^2 k_1}{(b')^2 k_2} = \frac{(a')^2}{(k_2 b')^2} k_1 k_2$ où k_1 et k_2 sont sans facteurs carrés.

Puisque a et b sont premiers entre eux, leurs décompositions en facteurs premiers n'ont aucun facteur premier en commun, k_1 et k_2 sont aussi premiers entre eux et ces deux nombres n'ont pas non plus de facteur premier commun. Le produit $k_1 k_2$ est un produit de facteurs premiers tous distincts, il est lui aussi sans facteur carré.

$\frac{a}{b} = \frac{(a')^2 k_1 k_2}{(b')^2 (k_2)^2} = \left(\frac{a'}{k_2 b'}\right)^2 \times (k_1 k_2)$ est le produit du carré d'un rationnel et d'un entier sans facteur carré.

2.2. En foi de quoi, pour les angles non droits de ABC (il y en a au moins deux, on supposera que ce sont ceux de sommets B et C), il existe des rationnels et des entiers uniques sans facteur carré (pas nécessairement les mêmes, ce sera à démontrer) tels que :

$\tan \widehat{ABC} = r_B \sqrt{k_B}$; $\tan \widehat{ACB} = r_C \sqrt{k_C}$ et éventuellement $\tan \widehat{BAC} = r_A \sqrt{k_A}$.

Alors : $\frac{\tan \widehat{ABC}}{\tan \widehat{ACB}} = \frac{CH}{BH} = \frac{r_B \sqrt{k_B}}{r_C \sqrt{k_C}}$.

Mais $\frac{CH}{BH} = \frac{\left|\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}\right|}{\left|\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}\right|}$ est un nombre rationnel en tant que quotient de deux cocktails rationnels.

On en conclut que $\frac{\sqrt{k_B}}{\sqrt{k_C}}$ est rationnel et par conséquent il en est de même de $\sqrt{k_B \times k_C} = k_C \times \frac{\sqrt{k_B}}{\sqrt{k_C}}$

D'après la question **A3**, cela ne peut être le cas que si $k_B \times k_C$ est le carré d'un nombre entier.

Mais puisque k_B et k_C sont sans facteur carré, cela n'a lieu que si ces deux entiers sont identiques (s'ils différaient d'un facteur premier, ce facteur figurerait dans leur produit avec l'exposant 1, ce produit ne serait pas un carré).

Ainsi, $k_B = k_C$. On montrerait pareillement que $k_B = k_A$.

Les entiers sans facteur carré figurant dans les carrés de tangentes sont égaux.

Il existe un seul et même entier k sans facteur carré tel que : $\tan \widehat{ABC} = r_B \sqrt{k}$; $\tan \widehat{ACB} = r_C \sqrt{k}$ et éventuellement $\tan \widehat{BAC} = r_A \sqrt{k}$.

Notons que puisque l'entier sans facteur carré est le même : $\dfrac{\tan \widehat{ABC}}{\tan \widehat{ACB}} = \dfrac{CH}{BH} = \dfrac{r_B}{r_C}$

2.3. Supposons que les angles de sommets B et C soient non droits.

Avec les notations ci-dessus : $\tan^2 \widehat{ABC} = \dfrac{AH^2}{BH^2} = {r_B}^2 k$ et $\tan^2 \widehat{ACB} = \dfrac{AH^2}{CH^2} = {r_C}^2 k$

Notons que : $AH^2 = k\ {r_B}^2\ BH^2 = k\,{r_C}^2 CH^2$.

Les points A, B, C sont à coordonnées entières et $H\ (x_H\,,\ y_H\,,\ z_H)$ a des coordonnées rationnelles.

Posons : $\begin{cases} b_1 = r_B\,(x_H - x_B) \\ b_2 = r_B\,(y_H - y_B) \\ b_3 = r_B\,(z_H - z_B) \end{cases}$ et $\begin{cases} u_1 = x_H - x_A \\ u_2 = y_H - y_A \\ u_3 = z_H - z_A \end{cases}$.

Ces nombres sont non tous nuls car H est supposé distinct de B et le triangle ABC non aplati (r_B n'est pas nul).

Il s'agit d'une part des coordonnées du vecteur $r_B\,\overrightarrow{BH}$ qui est un vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{BC}$ et d'autre part des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AH}$.

- La relation $AH^2 = k\,{r_B}^2\ BH^2$ se traduit par : ${u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2 = k\left({b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2\right)$
- Il s'agit de deux vecteurs orthogonaux. La nullité de leur produit scalaire se traduit par : $b_1\,u_1 + b_2\,u_2 + b_3\,u_3 = 0$
- Les coordonnées de A et B sont entières, celles de H rationnelles : les six nombres b_i, u_i sont tous des rationnels.

Les six nombres ainsi définis constituent une solution rationnelle non nulle du système $E(3,\ k)$. Nous obtenons de nouvelles solutions en multipliant les six nombres par un même nombre entier.

Posons : $r_B = \dfrac{p_B}{q_B}$, avec p_B et q_B entiers.

En choisissant de multiplier ces six nombres par un multiple commun de $(q_B\,,\ x_H\,,\ y_H\,,\ z_H)$, peu importe lequel, nous obtiendrons une solution non nulle de $E(3,\ k)$ composée de six nombres entiers.

Le système d'équations $E(3,\ k)$ admet au moins une solution non nulle en nombres entiers.

3. Notons $A_0B_0C_0$ le triangle T de référence. On note $\hat{\theta}_2 = \hat{B}_0$; $\hat{\theta}_3 = \hat{C}_0$ les angles de ce triangle de sommets B_0 et C_0. Nous supposerons sans pour autant diminuer la généralité que ces angles de sommets B_0 et C_0 sont tous deux aigus. De la sorte, le pied H_0 de la hauteur issue de A_0 appartient au segment $[B_0\ C_0]$ et est distinct des extrémités.

Conformément aux hypothèses de cette question, supposons qu'il existe des rationnels strictement positifs r_2, r_3, tels que $\tan \hat{\theta}_i = r_i \sqrt{k}$ $(i = 2, 3)$.

Supposons aussi qu'il existe des entiers $a_1, a_2, a_3, u_1, u_2, u_3$ non tous nuls vérifiant le système $E(3, k)$.

Posons : $\begin{cases} a_1 = r_2\,(x_H - x_B) \\ a_2 = r_2\,(y_H - y_B) \\ a_3 = r_2\,(z_H - z_B) \end{cases}$ et : $\begin{cases} u_1 = x_H - x_A \\ u_2 = y_H - y_A \\ u_3 = z_H - z_A \end{cases}$.

Ces relations déterminent le point H à partir d'un point A arbitraire puis le point B à partir de H.

La relation $r_B^{\ 2}\, BH^2 = r_C^{\ 2} CH^2$ laisse *a priori* deux positions possibles pour le point C mais on veut B et C alignés avec H de part et d'autre de H, conformément au triangle T :

Le point C est déterminé par : $\begin{cases} a_1 = -r_3\,(x_H - x_C) \\ a_2 = -r_3\,(y_H - y_C) \\ a_3 = -r_3\,(z_H - z_C) \end{cases}$

La relation $a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0$ vérifiée par ces six nombres se traduit par : $r_2\, \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AH} = -r_3\, \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AH} = 0$ ce qui caractérise H comme étant bien le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC.

La relation $u_1^{\ 2} + u_2^{\ 2} + u_3^{\ 2} = k\left(a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}\right)$ vérifiée par ces six nombres se traduit par : $AH^2 = k\, r_2^{\ 2} BH^2 = k r_3^{\ 2}\, CH^2$ puis par $\tan A\hat{B}C = \tan \hat{\theta}_2$ et $\tan A\hat{C}B = \tan \hat{\theta}_3$. Deux des angles du triangle ABC ont les mêmes angles que le triangle de référence T, il en sera de même du troisième.

ABC est semblable au triangle T de référence.

Si A est choisi de façon à avoir des coordonnées rationnelles, les points B, C, H ont aussi des coordonnées rationnelles. En multipliant toutes les données par un nombre entier convenable, on obtient un triangle homothétique dont les coordonnées sont des entiers.

4.1. Soit ABC un triangle isocèle de sommet A dont les côtés ont pour longueurs 3, 3, 2. Soit H le pied de la hauteur issue de A. Alors : $AH^2 = AB^2 - \dfrac{BC^2}{4} = 8$.

L'angle de sommet B a pour tangente : $\tan \widehat{ABC} = 2\sqrt{2}$ tandis que l'angle de sommet A a pour tangente $\dfrac{4\sqrt{2}}{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 1} = \dfrac{4}{7}\sqrt{2}$. Dans ce contexte : $r_2 = 2 = r_3$.

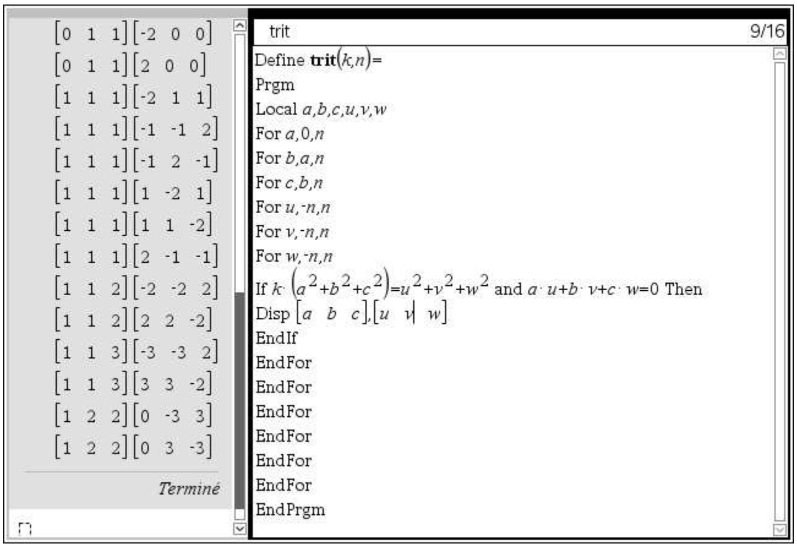
Il existe bien un même entier sans facteur carré, $k = 2$, vérifiant les conditions précédentes.

Il s'agit maintenant de résoudre : $\begin{cases} 2\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \\ a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0 \end{cases}$, système qu'il est inutile de « résoudre », des solutions évidentes sautent aux yeux.

Autrement, le programme **trit** recherche par exhaustivité des triplets solutions dont les termes sont situés dans des plages d'entiers délimitées par un entier n, et cela pour une valeur donnée de k.

Il ne faut pas chercher bien longtemps pour obtenir plusieurs solutions particulières non nulles lorsqu'on lance ce programme avec $k = 2$.

Choisissons une des solutions affichées, par exemple (pourquoi faire simple …) :
$(a_1, a_2, a_3) = (1,\ 1,\ 3)$;
$(u_1, u_2, u_3) = (3,\ 3,\ -2)$



Avec ce choix : $\begin{cases} 1 = 2\left(x_H - x_B\right) = -2\left(x_H - x_C\right) \\ 1 = 2\left(y_H - y_B\right) = -2\left(y_H - y_C\right) \\ 3 = 2\left(z_H - z_B\right) = -2\left(z_H - z_C\right) \end{cases}$ et $\begin{cases} 3 = x_H - x_A \\ 3 = y_H - y_A \\ -2 = z_H - z_A \end{cases}$

Prenons pour point A l'origine du repère. Le point H est le point $H(3,\ 3,\ -2)$ et le point B a pour coordonnées $B\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}, -\dfrac{7}{2}\right)$.

Le point C est le symétrique de B par rapport à H : $C\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{7}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

En multipliant toutes les données par 2, on parvient au triangle ABC définitif avec $B(5,\ 5,\ -7)$ et $C(7,\ 7,\ -1)$, A étant toujours l'origine du repère.

Vérification : $AB^2 = 25 + 25 + 49 = 99$; $AC^2 = 49 + 49 + 1 = 99$ et $BC^2 = 4 + 4 + 36 = 44$.
Ainsi : $AB = AC = 3\sqrt{11}$ et $BC = 2\sqrt{11}$, ABC est semblable au triangle T de référence, il a les mêmes angles, et ses sommets ont des coordonnées entières.

Au lecteur de tester une autre solution, soit parmi les solutions affichées, soit une des solutions « évidentes » que ce même lecteur n'aura pas manqué de remarquer spontanément.
.

4.2. Soit ABC un triangle isocèle de sommet A dont les côtés ont pour longueurs 2, 2, 3. Soit H le pied de la hauteur issue de A. Alors : $AH^2 = AB^2 - \frac{BC^2}{4} = \frac{7}{4}$.

L'angle de sommet B a pour tangente : $\tan \widehat{ABC} = \frac{\sqrt{7}}{3}$ et celui de sommet A a pour tangente $\frac{\frac{2\sqrt{7}}{3}}{1 - \frac{7}{9}} = 3\sqrt{7}$.

Il existe bien un même entier, $k = 7$, sans facteur carré, vérifiant les conditions précédentes.
Il s'agit maintenant de résoudre : $\begin{cases} 7\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \\ a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0 \end{cases}$

Supposons qu'il existe des entiers solutions, nuls ou non. En appliquant l'identité remarquable suggérée aux entiers a_i et u_i :
$$\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\right) = \left(a_1 u_2 - a_2 u_1\right)^2 + \left(a_1u_3 - a_3 u_1\right)^2 + \left(a_2 u_3 - a_3 u_2\right)^2$$
De sorte que :
$$7\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^2 = \left(a_1 u_2 - a_2 u_1\right)^2 + \left(a_1u_3 - a_3 u_1\right)^2 + \left(a_2 u_3 - a_3 u_2\right)^2$$

D'après la question **A.4.2** , cette relation ne peut être vérifiée que si les quatre entiers en cause sont nuls.
En particulier $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$ ce qui implique que $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ et ce qui implique ensuite que $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$ donc que $u_1 = u_2 = u_3 = 0$.

Le système $E(3,7)$ n'a pas d'autre solution que la solution nulle, on ne peut pas trouver de triangle à sommets entiers qui ait les mêmes angles que le triangle T.

NB. Le programme **trit** ne trouve que la solution nulle lorsque $k = 7$, dans la plage [0,10].

Ce qui ne prouve rien du tout.

Ce programme est utile pour obtenir à peu de frais des solutions particulières quand il y en a, mais il est incapable de démontrer qu'il n'y en a pas.