CORRIGÉ

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Classes de terminale S • 2013

Source • Gilbert JULIA

Concours Général 2013. Eléments de correction

Auteur du document : Gilbert JULIA, professeur agrégé honoraire
Ancien préparateur au concours du CAPES de Mathématiques

Problème 1 : « Superbes suites »

Remarques préliminaires

- Un exemple simple de suite superbe est la suite $(a, a,..., a)$ composée de n termes égaux (suite constante).
- Si une suite u est superbe, alors pour tout entier k strictement positif, la suite $k\,u$ est elle aussi superbe.
- Si d est un diviseur commun à tous les termes d'une suite superbe u, la suite $\frac{u}{d}$ est elle aussi superbe.
- Un changement de l'ordre des termes d'une suite superbe ne change ni la somme de ses termes ni sa qualité.

1. La suite $(21,\ 7,\ b)$ a pour somme $28+b$.
Cette suite est superbe si et seulement si $28+b$ est multiple de 21 et b divise 28.
Parmi les diviseurs de 28, seul le diviseur $b=14$ est tel que $28+b$ est multiple de 21. Il existe une et une seule suite répondant à la question, la suite $(21,\ 7,\ 14)$

2.1. Soient a et b deux entiers strictement positifs tels que la suite $(a,\ b)$ est superbe.

- a divise $a+b$ et a donc il divise b.
- b divise $a+b$ et b donc il divise a.

Les entiers a et b se divisent mutuellement, ils sont égaux ou opposés. Vu qu'il s'agit de deux entiers strictement positifs, ils sont égaux.

Les seules suites superbes de longueur 2 sont les suites constantes $(a,\ a)$ où a est un entier strictement positif.

Cherchons les suites superbes $(a,\ b,\ c)$ de longueur 3 autres que les suites constantes.

Premier cas : deux exactement des entiers a, b, c sont égaux
Soit $(a,\ a,\ b)$ une suite superbe de longueur 3 tels que $a \neq b$. On peut supposer a et b premiers entre eux. S'ils ne le sont pas, on considère la suite $\left(\frac{a}{\gcd(a,b)}, \frac{a}{\gcd(a,b)}, \frac{b}{\gcd(a,b)}\right)$[1] à la place de $(a,\ a,\ b)$.

- a divise $2a+b$ et a donc il divise b. Etant premier avec b, $a=1$.
- b divise $2a+b$ et b donc il divise $2a$. Etant premier avec a, il divise 2.

[1] NB : « gcd » pour « greatest common divisor », équivalent anglo-saxon de « PGCD » et seule appellation reconnue pour désigner le plus grand commun diviseur par l'éditeur d'équations utilisé dans ce document.

On en déduit que :

- Ou bien $b=1$ et $a=1$, on obtient la suite constante $(1,\ 1,\ 1)$, ce que l'hypothèse exclut.
- Ou bien $b=2$ et $a=1$, on obtient la suite $(1,\ 1,\ 2)$. Sont superbes avec cette suite toutes les suites $(a,\ a,\ 2a)$, multiples de $(1,\ 1,\ 2)$.

Deuxième cas : a, b, c sont trois entiers distincts.
Soit $(a,\ b,\ c)$ une suite superbe de longueur 3 tels que $a<b<c$.

On note que si d est un diviseur commun de a et de b : $a=d\,a'$; $b=d\,b'$, alors d divise $a+b+c=d(a'+b')+c$: d divise c. Un diviseur commun de deux des trois nombres *a, b, c* est diviseur du troisième. Par contraposition, si *a, b, c* sont premiers dans leur ensemble, alors ils sont premiers deux à deux.

On peut donc supposer *a, b, c* premiers entre eux deux à deux. S'ils ne le sont pas, on considère la suite $\left(\frac{a}{\gcd(a,b,c)},\ \frac{b}{\gcd(a,b,c)},\ \frac{c}{\gcd(a,b,c)}\right)$ à la place de $(a,\ b,\ c)$.

- D'une part : $a+b+c\le(c-2)+(c-1)+c=3(c-1)<3c$
- D'autre part, *a, b, c* sont premiers entre eux deux à deux et divisent $a+b+c$: Le produit abc divise $a+b+c$

Par conséquent $abc\le a+b+c\le 3(c-1)<3c$ ce qui implique $ab<3$.
Nécessairement : $a=1$; $b=2$.

$2c$ divise $c+3$. Donc *c* divise 3, et nécessairement $c=3$

L'unique suite formée de trois entiers distincts premiers entre eux deux à deux est la suite $(1,\ 2,\ 3)$
Sont superbes, en même temps que cette suite, toutes les suites de la forme $(a,\ 2a,\ 3a)$

2.2. L'entier $2013=3\times 11\times 61$ possède huit diviseurs qui sont les entiers 1, 3, 11, 33, 61, 183, 671, 2013.

On cherche quatre entiers de l'ensemble {1, 3, 11, 33, 61, 183, 671, 2013} pas nécessairement distincts dont la somme est égale à 2013. Il n'existe pas de tels quadruplets car la somme de quatre entiers impairs, quels qu'ils soient, est un entier pair, elle ne peut être égale à 2013 qui est impair.

3.1. La suite $(1,\ 2,\ 3)$ est une suite superbe de somme 6. Si on prolonge cette suite par sa somme, on obtient une nouvelle suite superbe $(1,\ 2,\ 3,\ 6)$de somme 12, que l'on peut prolonger à son tour par sa somme.
Plus généralement, pour tout entier naturel *n*, la suite . $(1,\ 2,\ 3,\ 3\times 2,\ldots,\ 3\times 2^n)$ est une suite superbe de longueur $n+3$, de somme $3\times 2^{n+1}$, dont tous les termes sont distincts.

3.2. S'il existe une suite superbe de nombres premiers tous distincts, elle est de longueur au moins 3.
Or, étant donnés n nombres entiers $2 \leq a_1 < a_2 < ... < a_n$, $(n \geq 2)$, alors leur produit est strictement supérieur à leur somme. Démontrons ce résultat par récurrence :

Cas de deux entiers : $a_1 a_2 \geq 2a_2$ puisque $2 \leq a_1 < a_2 < ... < a_n$ $a_1 \geq 2$ tandis que $a_1 + a_2 < 2a_2$ puisque $a_1 < a_2$.

Supposons maintenant que dans le cas de $n-1$ entiers tels que $2 \leq a_1 < a_2 < ... < a_{n-1}$: $a_1 a_2 .... a_{n-1} > a_1 + a_2 .... + a_{n-1}$

Si on considère un entier de plus $a_n > a_{n-1}$:
$a_1 a_2 .... a_n = (a_1 .... a_{n-1}) a_n \geq a_n + (a_1 a_2 .... a_{n-1})$ en appliquant l'inégalité vue dans le cas de deux entiers.
$a_1 a_2 .... a_{n-1} > a_1 + a_2 .... + a_{n-1}$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Donc : $a_1 a_2 .... a_n = (a_1 .... a_{n-1}) a_n > a_n + (a_1 + a_2 + ... + a_{n-1})$. L'inégalité entre somme et produit de n entiers strictement positifs distincts est héréditaire.

Pour tout entier $n \geq 2$, le produit de n entiers strictement positifs distincts est strictement supérieur à leur somme.

Soit $(p_1, p_2, ..., p_n)$ une suite de nombres premiers distincts tels que $2 \leq p_1 < p_2 < ... < p_n$ et de somme : $p_1 + p_2 + ... + p_n$. Le PPCM de ces n nombres premiers est égal à leur produit. Ce PPCM est strictement supérieur à la somme $p_1 + p_2 + ... + p_n$, il ne la divise pas. Une telle suite n'est pas superbe.

4. Soit $u_n = a + (n-1)r$ une suite arithmétique de raison strictement positive r et de premier terme $u_1 = a$.
La somme de ses n premiers termes est égale à $s = u_1 + ... + u_n = n\,a + \frac{n(n-1)}{2} r$
La suite $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est une suite superbe si et seulement si pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, l'entier $u_k = a + (k-1)r$ divise s.

On peut supposer que les entiers a et r sont des entiers premiers entre eux (s'ils ne le sont pas, on considère à la place de la suite originale la suite de raison $\frac{r}{\gcd(a, r)}$ et de premier terme $\frac{a}{\gcd(a, r)}$ qui a les mêmes propriétés).

S'il en est ainsi :
a et r étant premiers entre eux, $u_0 = a$ et $u_1 = a + r$ sont premiers entre eux, de même que r et $u_1 = a + r$. En effet, si $a + r$ avait un diviseur commun d soit avec a soit avec r, le nombre d diviserait la différence soit $(a+r) - a$ soit $(a+r) - r$, c'est-à-dire qu'il diviserait les trois nombres a, r, $a + r$.
u_0 et u_1 étant premiers entre eux et étant diviseurs de s, le produit $u_0 \times u_1$ divise s.

De façon plus générale, par récurrence évidente, deux termes consécutifs de la suite $(u_1, u_2, ..., u_n)$ sont premiers entre eux et premiers avec r. Leur produit divise s.

En particulier, intéressons nous aux deux derniers, $u_{n-1} = a + (n-2)r$ et $u_n = a + (n-1)r$.

Le produit $(a + (n-1)r) \times (a + (n-2)r)$ divise $s = n\,a + \dfrac{n(n-1)}{2} r$

Si ce produit divise s, ce produit est inférieur ou égal à s.

De plus, puisque a et r sont strictement positifs, ils sont au moins égaux à 1 et $a + (n-1)r \geq 1 + (n-1) = n$

On peut écrire les inégalités : $n(a + (n-2)r) \leq (a + (n-1)r) \times (a + (n-2)r) \leq n\,a + \dfrac{n(n-1)}{2} r$.

De l'inégalité $n(a + (n-2)r) \leq n\,a + \dfrac{n(n-1)}{2} r$ on déduit : $a + (n-2)r \leq a + \dfrac{(n-1)}{2} r$ et de cette inégalité on déduit $(n-2) \leq \dfrac{(n-1)}{2}$, ce qui implique $n \leq 3$.

L'entier n ne peut prendre que les valeurs 2 ou 3.

Pour $n = 2$, nous avons vu que seules les suites constantes étaient superbes.

Pour $n = 3$, nous avons trouvé la suite $(1,\ 2,\ 3)$ et celles qui lui sont proportionnelles qui, effectivement, sont toutes des suites arithmétiques.

Donc, si une suite arithmétique est superbe, alors $n = 3$.

5. D'après les résultats de la question **2**, on peut essayer de construire une suite d'entiers $u = (a_n)$ magnifique, strictement croissante à partir du rang 2 et dont les trois premiers termes sont :
$(a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2)$.

En effet, si plus généralement $(a_1,\ a_2)$ est superbe elle est de la forme $(a,\ a)$ d'après **2.1** et si $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ est superbe avec $a_1 = a_2$, elle de la forme $(a,\ a,\ 2a)$ d'après **2.1**

Les trois premiers termes d'une telle suite sont proportionnels à $(1,\ 1,\ 2)$.

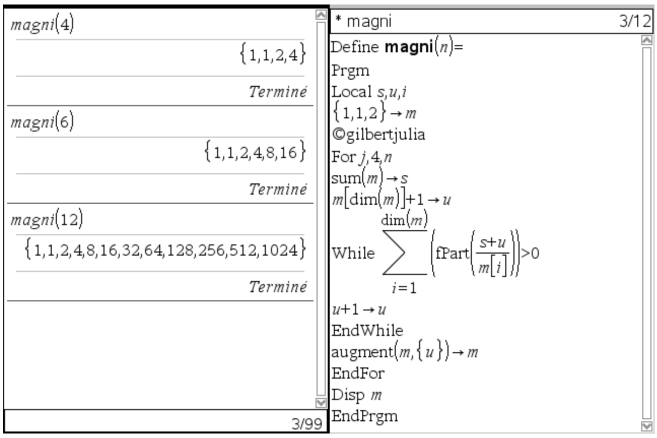
Cherchons un éventuel quatrième terme.
$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4) = (1,\ 1,\ 2,\ a_4)$ est superbe. Sa somme $s_4 = 4 + a_4$ est divisible par 2 et par a_4.

- Il existe un entier strictement positif u : $4 + a_4 = 2u$
- Il existe un entier strictement positif v : $4 + a_4 = v\,a_4$

Donc $a_4 = 2(u-2) = \dfrac{4}{v-1}$ et $(u-2) = \dfrac{2}{v-1}$

Le nombre $\dfrac{2}{v-1}$ devant être un entier strictement positif , ou bien $v = 3$; $u = 3$ ce qui conduit à $a_4 = 2$ (impasse car dans ce cas $a_4 = a_3$) ou bien $v = 2$; $u = 4$ ce qui conduit à $a_4 = 4$ (recevable).

On peut conjecturer que pour tout entier $n \geq 2$, $a_n = 2^{n-2}$, conjecture qui est renforcée par la recherche systématique des premiers termes de la suite en construction, exécutée par le programme **magni** ci-contre. Les 4, puis les 6, puis les 12 premiers termes sont affichés et corroborent cette conjecture.



Montrons par récurrence qu'il en est bien ainsi. Seule l'hypothèse d'hérédité reste à vérifier.

Supposons donc que pour $2 \leq i \leq n$, $a_i = 2^{i-2}$ et considérons la suite superbe $\left(1, 1, 2, 4, ..., 2^{n-2}, a_{n+1}\right)$.

Sa somme $s = 2^{n-1} + a_{n+1}$ est divisible par 2^{n-2} et par a_{n+1}.

- Il existe un entier strictement positif u : $2^{n-1} + a_{n+1} = 2^{n-2}\, u$
- Il existe un entier strictement positif v : $2^{n-1} + a_{n+1} = v\, a_{n+1}$

Donc $a_{n+1} = 2^{n-2}\left(u-2\right) = \dfrac{2^{n-1}}{v-1}$. On parvient aux mêmes constats que dans la recherche du quatrième terme.

La seule éventualité recevable $v = 2$; $u = 4$ conduit à $a_{n+1} = 2^{n-1}$.

Si on suppose que pour $2 \leq i \leq n$, $a_i = 2^{i-2}$, alors l'expression des termes a_i est encore recevable au rang suivant : $a_{n+1} = 2^{(n+1)-1}$. Elle est donc recevable pour tout entier $n \geq 2$.

De façon plus générale, les suites magnifiques recherchées sont proportionnelles à celle que l'on vient de construire : il existe un entier strictement positif a tel que $a_1 = a$ et $a_n = a \times 2^{n-2}$ pour tout indice $n \geq 2$.

6.1. Soit $\left(a_1, a_2, ..., a_n\right)$ une suite d'entiers strictement positifs de somme s.
Pour construire une suite superbe commençant par cette séquence :

Une idée est de répéter plusieurs fois cette séquence, disons k fois. On obtient une séquence d'entiers dont la somme est $k\,s$ et qui a les mêmes multiples que la somme initiale. On peut alors choisir l'entier k « convenablement ».

En particulier soit m un multiple commun des entiers $\left(a_1, a_2, ..., a_n\right)$. Si on considère la suite obtenue en accolant bout à bout m séquences égales à $\left(a_1, a_2, ..., a_n\right)$, on obtient une suite de longueur $m \times n$ dont la somme est égale à $m \times s$. Tous les entiers de cette suite divisent m, donc divisent la somme des termes. Cette suite est superbe.

6.2. Tout d'abord, étudions une suite remarquable dont la somme a la particularité d'être égale à la factorielle d'un entier :

Soit s un nombre entier tel que $s \geq 4$.

On considère la suite finie composée des nombres suivants :
$u_1 = s \times (s-2)$; $u_2 = s \times (s-1) \times (s-3)$; $u_3 = s \times (s-1) \times (s-2) \times (s-4)$;… ; $u_{s-2} = s \times (s-1) \times ... \times 3 \times 2$
En règle générale on pose : $u_k = s \times (s-1) \times (s-2) \times ... \times (s-k+1) \times (s-k-1)$ pour $1 \leq k \leq s-2$

On note que u_k est un produit d'entiers distincts strictement positifs tous inférieurs ou égaux à s.

On observe aussi que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq s-2$:
$u_k = [s \times (s-1) \times (s-2) \times ... \times (s-k+1) \times (s-k)] - [s \times (s-1) \times (s-2) \times ... \times (s-k+1)]$.

C'est ainsi que :
$u_1 = s \times (s-1) - s$
$u_2 = s \times (s-1) \times (s-2) - s \times (s-1)$
$u_3 = s \times (s-1) \times (s-2) \times (s-3) - s \times (s-1) \times (s-2)$
….
$u_{s-2} = s \times (s-1) \times ... \times 1 - s \times (s-1) \times ... \times 2 = s! - s \times (s-1) \times ... \times 2$

La somme de ces termes, mis sous cette forme, est une somme télescopique. Par addition, tous les termes intermédiaires s'éliminent, ne restent que le premier et le dernier : $\sum_{k=1}^{k=s-2} u_k = s! - s$

En posant en outre $u_0 = s$, la suite $(u_0, u_1, ..., u_{s-2})$ a pour somme exactement la factorielle $s!$.
Tous les termes de cette suite divisent leur somme : cette suite est superbe.

De plus, lorsque $s \geq 4$: $u_0 < u_1 < ... < u_{s-2}$. Il s'agit d'une suite superbe d'entiers strictement croissante.

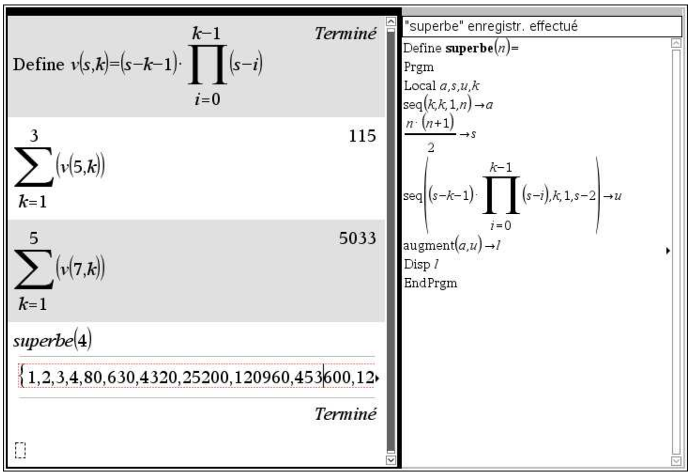
Soit maintenant $(a_1, a_2, ..., a_n)$ est une suite d'au moins trois entiers strictement positifs *tous distincts*.
On peut supposer la suite rangée de sorte que $a_1 < a_2 < ... < a_n$ puisque l'ordre des termes n'a pas d'incidence. Soit s leur somme. Ce nombre s vérifie : $3 \leq a_3 < ... < a_n < s$, il est au moins égal à 4 et est strictement supérieur à tous les termes de la suite $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

En appliquant la construction précédente avec $s = a_1 + ... + a_n$, on construit une première suite superbe dont le premier terme est : $u_0 = s$. On substitue à ce premier terme la suite $(a_1, ..., a_n)$ pour construire la suite : $(a_1, a_2, ... a_n, u_1, ..., u_{s-2})$, ce qui ne modifie pas la somme de tous les termes, toujours égale à la factorielle s ! De plus, tous les termes de la suite divisent cette factorielle.

Cette suite est superbe, formée d'entiers tous distincts, et commence par la suite $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

On applique ici cette construction à la suite des premiers entiers $(1, 2,.., n)$ (pour de petites valeurs de n).

La partie gauche de l'écran présente la construction des termes de la suite (u_k). La partie droite présente un programme construisant une suite superbe à partir des premiers entiers.



Par curiosité, la suite obtenue par cette méthode prolongeant celle des quatre premiers entiers est :
{1, 2, 3, 4, 80, 630, 4320, 25200, 120960, 453600, 1209600, 1814400}

Elle n'est pas « optimale », loin de là, on remarque empiriquement que {1, 2, 3, 4, 6, 8} est elle aussi une suite superbe.

Le prolongement superbe obtenu par cette méthode de la suite des cinq premiers entiers est encore plus exotique :
{1, 2, 3, 4, 5, 195, 2520, 30030, 327600, 3243240, 28828800, 227026800, 1556755200, 9081072000, 43589145600, 163459296000, 435891456000, 653837184000}

Problème 2 : « Tiré à quatre épingles»

1. On va déterminer, si elle existe, une droite passant par M et sécante avec D_1 et D_2 comme devant être la droite d'intersection de deux plans remarquables.

Soit A_1 un point de D_1 et $\overrightarrow{u_1}$ un vecteur directeur de D_1.

Le point M n'appartenant pas à D_1, les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$; $\overrightarrow{MA_1}$ sont deux vecteurs indépendants. Le point M et ces deux vecteurs indépendants déterminent un plan : le plan P_1 le plan passant par M et dont un couple de vecteurs directeurs est $\left(\overrightarrow{u_1}\ ;\ \overrightarrow{MA_1}\right)$.

Un point X appartient à ce plan si et seulement si il existe deux réels α_1 et β_1 tels que : $\overrightarrow{MX} = \alpha_1 \overrightarrow{u_1} + \beta_1 \overrightarrow{MA_1}$.

Ce plan P_1 contient la droite D_1. En effet, un point X_1 appartient à cette droite si et seulement si il existe un réel λ_1 tel que : $\overrightarrow{A_1X_1} = \lambda_1 \overrightarrow{u_1}$, mais alors : $\overrightarrow{MX_1} = \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{AX_1} = \lambda_1 \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{MA_1}$, relation vectorielle qui garantit l'appartenance de X_1 au plan P_1 ($\alpha_1 = \lambda_1$; $\beta_1 = 1$ dans le cas de ce point).

Soit de même A_2 un point de D_2 et $\overrightarrow{u_2}$ un vecteur directeur de D_2.

Le point M n'appartenant pas à D_2, les vecteurs $\overrightarrow{u_2}$; $\overrightarrow{MA_2}$ sont deux vecteurs indépendants. Le point M et ces deux vecteurs indépendants déterminent un plan : le plan P_2 le plan passant par M et dont un couple de vecteurs directeurs est $\left(\overrightarrow{u_2}\ ;\ \overrightarrow{MA_2}\right)$.

Ce plan P_2 contient la droite D_2 (démonstration identique à ce que l'on vient de faire, avec des indices 2 à la place des indices 1).

S'il existe une droite passant par M et coupant D_1 et D_2, alors cette droite est incluse dans P_1 (elle passe par deux points distincts de ce plan, le point M et son point d'intersection avec D_1). Pour des raisons identiques, cette droite est incluse dans P_2. Elle est donc incluse dans l'intersection de P_1 et de P_2.

L'intersection de ces deux plans n'est pas vide, elle contient M. Ce n'est pas un plan, sinon D_1 et D_2 seraient coplanaires dans ce plan. Il s'agit donc d'une droite. Si la droite que l'on recherche existe, c'est celle-là : Il existe au plus une droite issue de M et coupant à la fois D_1 et D_2.

Notons désormais Δ la droite d'intersection des deux plans P_1 et P_2.

- Les deux droites Δ et D_1 sont coplanaires dans P_1 : elles sont sécantes ou parallèles.
- Les deux droites Δ et D_2 sont coplanaires dans P_2 : elles sont sécantes ou parallèles.

Dans le cas général de non parallélisme ni avec D_1 ni avec D_2, Δ passe par M et coupe D_1 et D_2, c'est exactement la droite que l'on recherche.

Etudions les cas particuliers où Δ ne convient pas, faute de couper l'une des deux droites D_1 ou D_2.

Cette droite Δ est parallèle à D_1 si et seulement si ces deux droites ont la même direction, c'est-à-dire si et seulement si vectoriellement : $Vect\left(\overrightarrow{MA_1},\overrightarrow{u_1}\right)\cap Vect\left(\overrightarrow{MA_2},\overrightarrow{u_2}\right)=Vect\left(\overrightarrow{u_1}\right)$, où la notation $Vect$ désigne l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs mentionnés.

Ceci a lieu si et seulement si $\overrightarrow{u_1}\in Vect\left(\overrightarrow{MA_2},\overrightarrow{u_2}\right)$, ce qui revient à dire que D_1 est une droite parallèle à P_2.

De même, Δ est parallèle à D_2 si et seulement si $\overrightarrow{u_2}\in Vect\left(\overrightarrow{MA_1},\overrightarrow{u_1}\right)$, ce qui revient à dire que D_2 est une droite parallèle à P_1.

2. $M(x,\ y,\ z)\in(EF)$ si et seulement si il existe un réel α: $\overrightarrow{EM}=\alpha\overrightarrow{EF}$ c'est-à-dire si et seulement si il existe un réel α: $\begin{cases}x=\alpha\\y=0\\z=1\end{cases}$. On note que la somme $x+y+z$ des trois coordonnées obtenues est $1+\alpha$ tandis que la fonction symétrique d'ordre 2, $x\,y+y\,z+z\,x$ est égale à α.

$M(x,\ y,\ z)\in(BC)$ si et seulement si il existe un réel β: $\overrightarrow{BM}=\beta\overrightarrow{BC}$ c'est-à-dire si et seulement si il existe un réel β: $\begin{cases}x=1\\y=\beta\\z=0\end{cases}$. On note que la somme $x+y+z$ des trois coordonnées obtenues est $1+\beta$ tandis que la fonction symétrique d'ordre 2, $x\,y+y\,z+z\,x$ est égale à β.

$M(x,\ y,\ z)\in(DH)$ si et seulement si il existe un réel γ: $\overrightarrow{DM}=\gamma\overrightarrow{DH}$ c'est-à-dire si et seulement si il existe un réel γ: $\begin{cases}x=0\\y=1\\z=\gamma\end{cases}$. On note que la somme $x+y+z$ des trois coordonnées obtenues est $1+\gamma$ tandis que la fonction symétrique d'ordre 2, $x\,y+y\,z+z\,x$ est égale à γ.

3. En tenant compte des remarques faites au cours de la question **1** :

- Soit $M\left(x_M=\alpha,\ y_M=0, z_M=1\right)$ un point quelconque de D_1 : $x_M\ y_M+y_M\ z_M+z_M\ x_M-\left(x_M+y_M+z_M\right)+1=\alpha-(1-\alpha)+1=0$. Ce point appartient à S.
- Soit $M\left(x_M=1,\ y_M=\beta,\ z_M=0\right)$ un point quelconque de D_2 : $x_M\ y_M+y_M\ z_M+z_M\ x_M-\left(x_M+y_M+z_M\right)+1=\beta-(1-\beta)+1=0$. Ce point appartient à S.
- Soit $M\left(x_M=0,\ y_M=1,\ z_M=\gamma\right)$ un point quelconque de D_3 : $x_M\ y_M+y_M\ z_M+z_M\ x_M-\left(x_M+y_M+z_M\right)+1=\gamma-(1-\gamma)+1=0$. Ce point appartient à S.

Tout point de $D_1\cup D_2\cup D_3$ appartient à S.

4. Soit D $\left(M_0,\ \vec{u}\right)$ une droite issue d'un point quelconque $M_0\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ quelconque (*a, b, c* non tous nuls donc).

$M(x,\ y,\ z) \in \left(M_0,\ \vec{u}\right)$ si et seulement si il existe un réel λ : $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{u}$ c'est-à-dire si et seulement si il existe un réel λ : $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$. Les coordonnées d'un tel point sont du premier degré en λ.

Ce point appartient en outre à S si et seulement si ses coordonnées, du premier degré en λ, vérifient l'équation $x\,y + y\,z + z\,x - (x + y + z) + 1 = 0$, équation de degré 2 (les termes *xy*, *yz*, *zx* de cette équation sont du deuxième degré en λ).

Sans qu'il soit utile d'expliciter l'équation obtenue :

- Ou bien elle dégénère en $0\lambda^2 + 0\lambda + 0 = 0$, tout point de $\left(M_0,\ \vec{u}\right)$ appartient à S, la droite est incluse dans S.
- Ou bien il s'agit d'une équation de degré 2 au plus, auquel cas elle a 0, 1 ou 2 solutions, auxquelles correspondent 0, 1 ou 2 points d'intersection avec S.

5. Les trois droites D_1, D_2 et D_3, toutes trois incluses dans S, sont deux à deux non coplanaires et sans point commun. Si une droite coupe chacune d'entre elles, les trois points d'intersection sont trois points distincts. Nous avons affaire à une droite ayant strictement plus de deux points communs avec S, cette droite est incluse dans S.

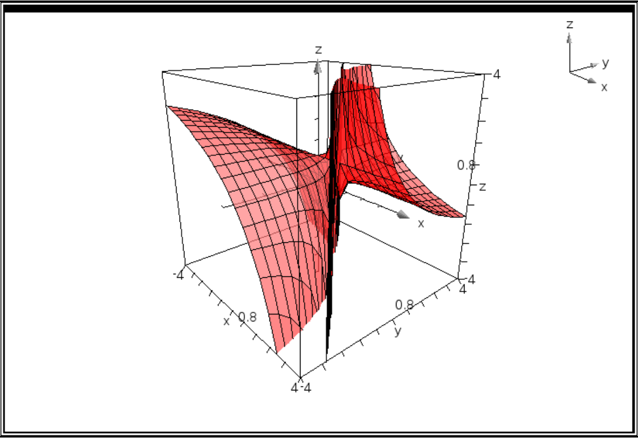
6. Une droite qui coupe D_1, D_2 et D_3 est incluse dans S. La droite D_4 a quant à elle au plus deux points d'intersection avec S. Une droite qui coupe les quatre droites D_1, D_2, D_3 et D_4 ne peut le faire qu'en l'un de ces points d'intersection de D_4 avec S.

Il reste à voir si, par un point d'intersection de D_4 avec S, il peut passer plusieurs droites coupant D_1, D_2 et D_3. S'il y avait deux droites distinctes coupant D_1, D_2 et D_3 et passant par un même point de S, ces deux droites seraient sécantes et détermineraient un plan dans lequel deux au moins des trois droites D_1, D_2 et D_3 seraient incluses. Le fait que D_1, D_2 et D_3 soient deux à deux non coplanaires écarte cette hypothèse.

Il existe au plus deux droites qui coupent à la fois D_1, D_2, D_3 et D_4.

Un aperçu de l'ensemble S, dont la forme rappelle celle d'un diabolo.

Conjecturons qu'il s'agit d'un « hyperboloïde à une nappe ».



Problème 3 : « Il faut passer les premiers »

Le jeu consiste à lancer plusieurs fois un dé à six faces et à faire la somme des points obtenus. Le fait d'obtenir une somme de points égale à un nombre premier est fatal. C'est pourquoi « il faut passer les premiers » pour continuer le jeu.

1. Il faut un minimum de 16 lancers pour atteindre le nombre 96 (en n'obtenant que des 6) et un dix-septième lancer 4, 5 ou 6 peut permettre alors d'atteindre 100, 101 ou 102 et de gagner la partie.

La probabilité que Sisyphe réalise une telle séquence est $\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{16}$, donc $p(17)\geq\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{16}$. On peut d'ailleurs écrire une inégalité stricte : $p(17)>\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{16}$ car d'autres séquences sont gagnantes en 17 coups (par exemple atteindre 90 par une série de six, puis un cinq, puis un cinq ou un six).

La plus petite valeur de n pour laquelle $p(n)>0$ est 17.

La suite $(p(n))_{n\in N^*}$ étant croissante (si on gagne une réussite en au plus n lancers, *a fortiori* on la gagne en au plus $n+1$ lancers), les valeurs de n pour lesquelles $p(n)>0$ sont toutes les valeurs entières ≥ 17.

La suite $(p(n))_{n\in N^*}$ étant croissante et majorée par 1, elle est convergente.

Remarquons aussi que si une partie est en cours au n-ième lancer, la probabilité de gagner la partie en cours en au plus $n+17$ lancers est $\geq p(17)$. Si le n-ième lancer amène à une case k qui n'est pas un nombre premier, l'une des possibilités pour gagner cette partie en au plus $n+17$ lancers est en effet d'atteindre une case immédiatement supérieure à k de n'importe quelle séquence gagnante en 17 coups puis de suivre cette séquence gagnante.

Considérons l'évènement A_i : « n'avoir gagné aucune partie en $17i$ lancers ». D'après la définition de $p(17)$: $p(A_1)=1-p(17)$. D'après la remarque précédente : $p(A_2)\leq(1-p(17))^2$ et de façon plus générale : $p(A_i)\leq(1-p(17))^i$.

On en déduit que : $p(17i)\geq 1-(1-p(17))^i$ et que : $\lim\limits_{i\to\infty}(p(17i))=1$.

La suite $(p(n))_{n\in N^*}$ converge vers 1.

Autrement dit, avec suffisamment de persévérance, Sisyphe finira bien, un jour ou l'autre, par gagner une partie.

2.1.

- La variable aléatoire X prend la valeur 2 si et seulement si Sisyphe obtient deux as consécutifs ou bien un 2 au premier lancer : $P(X=2)=\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{6}=\frac{7}{36}$

- La variable aléatoire X prend la valeur 3 si et seulement si Sisyphe obtient un as puis un 2ou bien un 3 au premier lancer : $P(X=3)=\frac{7}{36}$. Par conséquent : $P(X\geq 4)=1-P(X<4)=1-\frac{7}{18}=\frac{11}{18}$

- La variable aléatoire X prend la valeur 5 si et seulement si Sisyphe obtient l'une des séquences suivantes : $(1,3,1)$; $(1,4)$; $(4,1)$; (5). En conséquence : $P(X=5)=\left(\frac{1}{6}\right)^3+2\times\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{6}=\frac{49}{216}$

2.2. Appelons « trajet » et désignons par T l'ensemble des cases par lesquelles passe Sisyphe au cours d'une réussite.

- Sisyphe passe par la case 1 si et seulement s'il obtient un 1 au premier lancer : $P(1\in T)=\frac{1}{6}$.

Nous avons vu ci-dessus les probabilités pour que Sisyphe passe par les cases 2, 3 et 5 (et, puisque ce sont des nombres premiers, s'y arrête).

- Sisyphe passe par la case 4 si et seulement s'il obtient 4 au premier lancer ou bien un 1 puis un 3 : $P(4\in T)=\frac{1}{6}+\frac{1}{36}=\frac{7}{36}$

- Sisyphe passe par la case 6 si et seulement si il obtient 6 au premier lancer ou bien 4 puis 2 ou bien un 1 puis 5, ou bien 1 puis 3 puis 2 : $P(6\in T)=\frac{1}{6}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{216}=\frac{49}{216}$

Soit maintenant k un entier vérifiant $7\leq k\leq 100$. Pour passer par la case k, Sisyphe doit d'abord passer par l'une des cases $\{k-6,k-5,k-4,k-3,k-2,k-1\}$ qui n'est pas un nombre premier puis obtenir le complément adéquat, 6 5, 4, 3, 2 ou 1 selon le cas.

Pour k vérifiant $7 \leq k \leq 99$, désignons par $NP(k)$ l'ensemble des nombres qui sont *non premiers* parmi les six prédécesseurs de k (par exemple, $NP(7) = \{1, 4, 6\}$; $NP(10) = \{4, 6, 8, 9\}$; $NP(15) = \{9, 10, 12, 14\}$).

Pour passer par la case k, Sisyphe doit d'abord passer par l'une des cases de l'ensemble $NP(k)$ puis obtenir le complément adéquat, 6 5, 4, 3, 2 ou 1 selon le cas. Le trajet se termine en k si k est premier.

Ainsi : $P(k \in T) = \frac{1}{6} \times \left(\sum_{i \in NP(k)} P(i \in T) \right)$. Ce qui constitue une relation de récurrence permettant le calcul de ces probabilités de proche en proche.

Par exemple $P(7 \in T) = \frac{1}{6} \times (P(1 \in T) + P(4 \in T) + P(6 \in T)) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} + \frac{7}{36} + \frac{49}{216} \right) = \frac{127}{1296}$.

Dans ce cas, puisque 7 est premier, le trajet s'arrête en 7, cette probabilité est aussi $P(X = 7)$

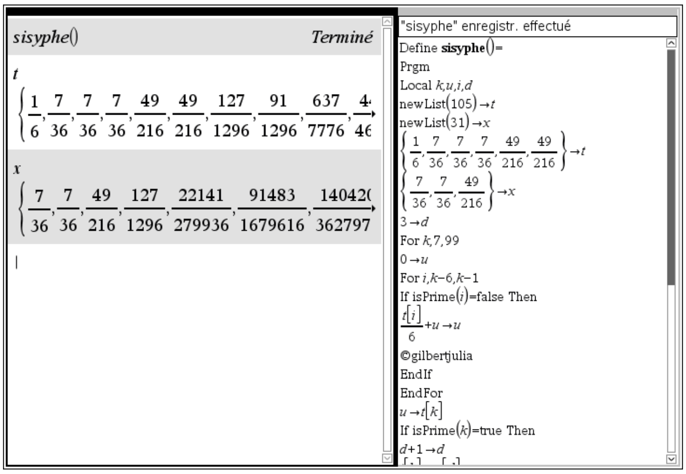
Pour k vérifiant $100 \leq k \leq 105$, le calcul est un peu différent, le trajet s'achève nécessairement en k et $P(X = k) = \frac{1}{6} \times \left(\sum_{i = k-6,\ i \neq 97}^{i=99} P(i \in T) \right)$

Calcul des valeurs exactes des probabilités $P(X=k)$ à l'aide d'un algorithme

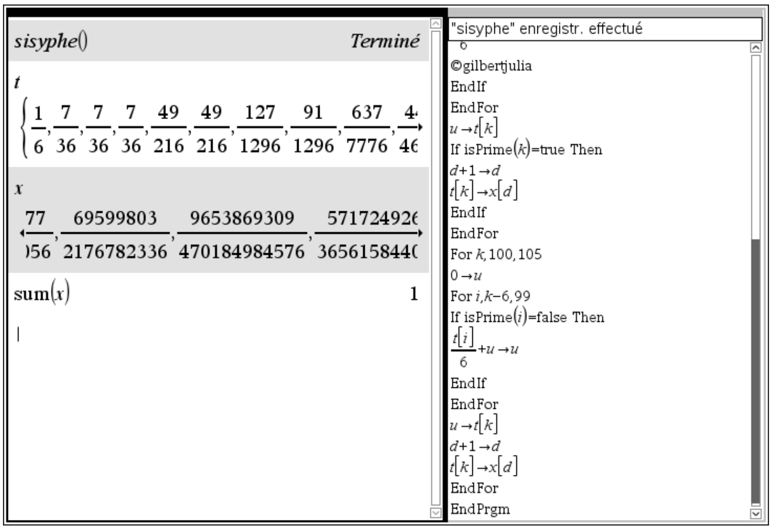
Le programme **sisyphe** va générer deux listes **t** et **x**.

La liste **t** sera de dimension 105 et sera telle que pour tout entier k vérifiant $1 \le k \le 105$: $t[k] = P(k \in T)$ (probabilité pour que l'entier k appartienne au trajet de Sisyphe).

La liste **x** sera de dimension 31 et sera telle que pour tout entier k *premier* vérifiant $2 \le k \le 97$ (il y a 25 entiers de cette sorte) et pour les entiers 100, 101, …, 105 : $x[k] = P(X=k)$ (probabilité pour que la réussite s'achève en k).



La liste **t** est initialisée par ses six premiers termes, calculés dans la question **2.1**, et la liste **x** est initialisée par ses trois premiers termes, qui sont les probabilités pour que la réussite s'achève en 2, en 3 et en 5 respectivement.

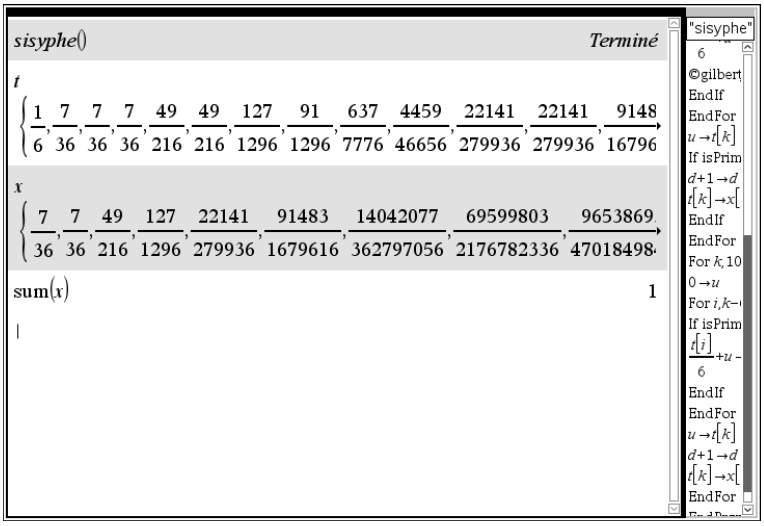


Pour k allant de 7 à 99, nous appliquons la relation de récurrence : $P(k \in T) = \frac{1}{6}\left(\sum_{i \in NP(k)} P(i \in T)\right)$, le tri entre les prédécesseurs premiers et ceux non premiers étant effectué par une instruction conditionnelle.

Si l'entier k est un nombre premier, cette probabilité est enregistrée dans la liste **x** et l'indice courant d de cette liste est incrémenté d'une unité.

Pour k allant de 100 à105, nous appliquons la relation de récurrence :

$$P(X=k)=P(k\in T)=\frac{1}{6}\left(\sum_{i=k-6,i\ non\ premier}^{99}P(i\in T)\right).$$

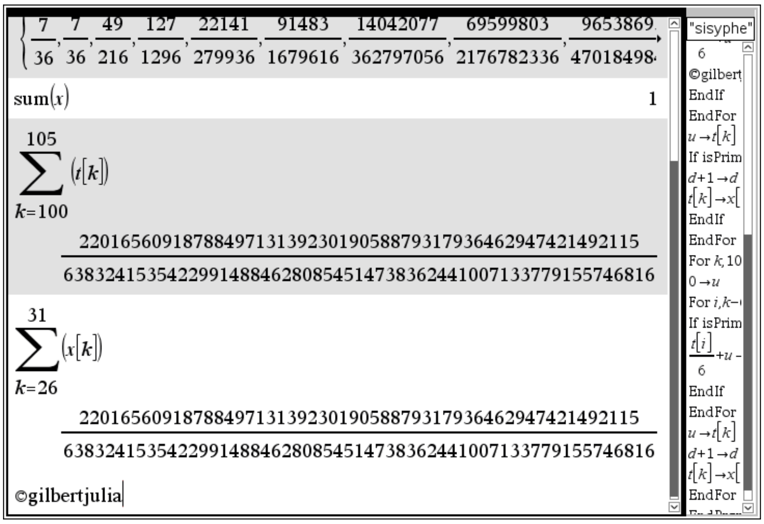


Cette probabilité est enregistrée dans la liste **x** et l'indice courant d de cette liste est incrémenté d'une unité.

À gauche de l'écran, le programme **sisyph()** a été exécuté et les listes **t** et **x** affichées. Les probabilités que la réussite s'achève en 2, 3, 5, 7, 11, 13 et 17 apparaissent à l'écran.

Nous avons aussi calculé la somme des termes de la liste **x**. Le résultat 1 indique que cette liste définit bien une distribution de probabilité.

Nous pouvons dès lors obtenir de deux façons différentes la probabilité que Sisyphe gagne la partie.



Nous avons affiché ici délibérément les valeurs exactes. Evidemment, l'énorme nombre rationnel affiché ne nous parle pas. Le mode de calcul **Exact** n'est pas le mode adapté à ce genre de situation.

Nous laissons le soin au lecteur de changer ce mode.

3.1. D'après la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\alpha_2 = \frac{P((X=3)\cap(X>2))}{P(X>2)} = \frac{P(X=3)}{P(X>2)} = \frac{P(X=3)}{1-P(X=2)}\text{, ce qui donne : } \alpha_2 = \frac{7/36}{1-7/36} = \frac{7}{29}$$

De même : $\alpha_3 = \dfrac{P((X=5)\cap(X>3))}{P(X>3)} = \dfrac{P(X=5)}{P(X>3)} = \dfrac{P(X=5)}{1-P(X=2)-P(X=3)}$, ce qui donne :

$$\alpha_3 = \frac{49/216}{1-7/36-7/36} = \frac{49}{132}$$

De façon plus générale, si p et p' sont deux nombres premiers consécutifs : $\alpha_p = \dfrac{P(X=p')}{P(X>p)}$, c'est-à-dire :

$$\alpha_p = \frac{P(X=p')}{1-P(X=2)-...-P(X=p)}$$

3.2. Sisyphe gagne la partie s'il parvient à franchir sans encombre tous les écueils des nombres premiers y compris le nombre premier 97.

$G=(X>97)=\bigcap_p (X>p)$ pour tous les entiers p inférieurs ou égaux à 97.

Ces évènements sont emboîtés, ce qui permet d'écrire successivement :

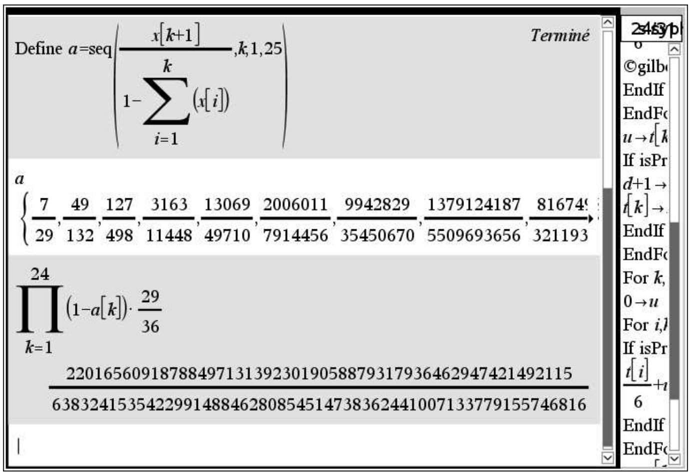
$$P(X>97)=P[(X>97)\cap(X>89)]=P(X>89)\times P_{X>89}(X>97)=P(X>89)\times(1-\alpha_{89})$$
$$P(X>89)=P[(X>89)\cap(X>83)]=P(X>83)\times P_{X>83}(X>89)=P(X>83)\times(1-\alpha_{83})$$
$$P(X>83)=P[(X>83)\cap(X>79)]=P(X>79)\times P_{X>79}(X>83)=P(X>79)\times(1-\alpha_{79})$$
…….
$$P(X>3)=P[(X>3)\cap(X>2)]=P(X>2)\times P_{X>2}(X>3)=P(X>2)\times(1-\alpha_2)$$

Ainsi, par multiplication membre à membre des égalités précédentes :

$$P(X>97)=(1-\alpha_{89})\times(1-\alpha_{83})\times...\times(1-\alpha_2)\times\frac{29}{36}$$

Ci-contre, l'affichage des premières valeurs des α_p et la probabilité de gagner la partie calculée par cette méthode.

Nous avons là encore affiché délibérément la valeur exacte, alors qu'une valeur approchée est plus adéquate. Au lecteur de changer de mode.



$$P(X>97)=(1-\alpha_{89})\times(1-\alpha_{83})\times\ldots\times(1-\alpha_5)\times\frac{49}{132}\times\frac{7}{29}\times\frac{29}{36}=(1-\alpha_{89})\times\ldots\times(1-\alpha_5)\times\frac{343}{4752}$$

3.3. Dans la plage des six entiers immédiatement supérieurs à un nombre premier p allant de 5 à 83, il y a soit un soit deux nombres premiers. Par conséquent : $\frac{1}{6}\le\alpha_p\le\frac{1}{3}$

Un encadrement suggéré :

$\left(\frac{2}{3}\right)^{22}\times\frac{343}{4752}\le P(G)\le\left(\frac{5}{6}\right)^{22}\times\frac{343}{4752}$ ce qui amène à l'encadrement $0{,}0000096<P(G)<0{,}001308$

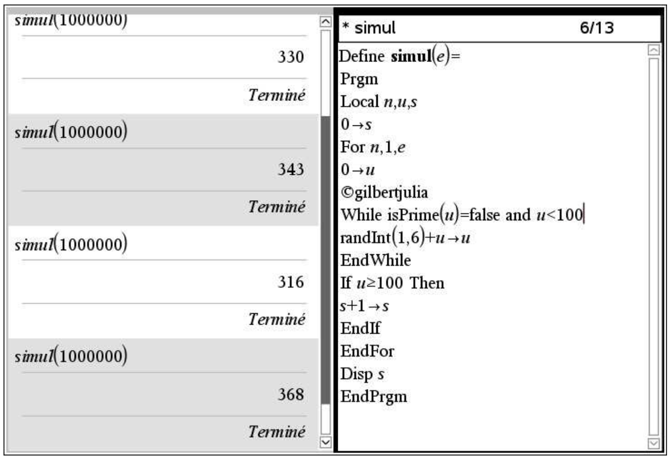
Complément « pour aller plus loin » : une simulation

L'algorithme ci-contre simule une série de **e** parties et dénombre les parties gagnées.

Ce nombre de parties gagnées parmi les **e** parties simulées est affiché à la fin du programme.

Cet algorithme est exécuté plusieurs fois avec 1000000 d'essais.

Sans qu'il soit question d'estimer la probabilité de gain (cette probabilité est hors normes d'application des outils usuels d'estimation), nous nous contenterons subjectivement de remarquer que les résultats affichés « ne nous étonnent pas ».



Nous avons maintenant l'explication du prénom étrange donné au joueur.

Avant de gagner une partie, Sisyphe doit très probablement procéder à un grand nombre d'essais. Un personnage mythique de même prénom, lui, ne réussit jamais dans sa besogne.

Le nôtre de Sisyphe est particulièrement chanceux, la **partie A** du problème montre qu'il est certain qu'il finira par gagner une partie. En ce qui le concerne, pas de tourment dont il ne connaîtra pas la fin.

Il nous faut imaginer Sisyphe heureux.