CORRIGÉ

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Classes de terminale S • 2009

Source • igmaths

MA 09

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

———

SESSION DE 2009

———

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

Durée : 5 heures

———

La calculatrice de poche est autorisée, conformément à la réglementation.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

L'énoncé comporte trois exercices indépendants.

Il n'est pas obligatoire de traiter les exercices dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement l'exercice et la question traitée en respectant l'indexation du texte.

Pour poursuivre la résolution d'un exercice, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Exercice I

1. (a) Par $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ et $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$.

   (b) Par variation pour la première et par intégration de la première entre 0 et θ pour la deuxième.

2. (a) Par continuité de f en 0 ($1 - f(x) \leq ax^2$) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\theta_n) = 1$, donc θ_n est dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ pour n assez grand.

   Pour de tels n $\theta_n \leq \dfrac{\left[1 - f(\frac{x}{2^n})\right]\pi}{2}$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n = 0$.

   D'après la relation satisfaite par f, on obtient : $\cos(\theta_n) = \cos(2\theta_{n+1})$.

   Donc si on choisit un rang N à partir duquel θ_n est dans $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ on obtient : $\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}$.

   (b) On aura donc : $\theta_n = \dfrac{\theta_N}{2^{n-N}}$ et $f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = \cos\left(\dfrac{\theta_N}{2^{n-N}}\right)$.

   Mais, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - f(x)}{x^2} = a$ et $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{1-\cos(\theta)}{\theta^2} = \dfrac{1}{2}$,

   donc $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{\theta_N}{2^{n-N}\dfrac{x}{2^n}}\right]^2 = 2a$, $a \geqslant 0$ et, au signe près, $\theta_N = \dfrac{x}{2^N} \cdot \sqrt{2a}$.

   On obtient : $f\left(\dfrac{x}{2^N}\right) = \cos\theta_N = \cos\left(\dfrac{x\sqrt{2a}}{2^N}\right)$, puis par récurrence sur $k \leq N$,

   $f\left(\dfrac{x}{2^{N-k}}\right) = \cos\left(\dfrac{x\sqrt{2a}}{2^{N-k}}\right)$ ce qui donne le résultat pour $k = N$.

Exercice II

1. La probabilité que je ne marque rien est $\dfrac{20\times 19\times 18\times 17}{20^4} = \dfrac{116280}{160000} = \dfrac{2907}{4000} \simeq 0,72675$.

2. Loi binomiale : $P(N_a = 0) = \dfrac{19^4}{20^4} = \dfrac{130321}{160000}$, $P(N_a = 1) = 4 \times \dfrac{19^3}{20^4} = \dfrac{27436}{160000}$, $P(N_a = 2) = 6 \times \dfrac{19^2}{20^4} = \dfrac{2166}{160000}$, $P(N_a = 3) = 4\dfrac{19}{20^4} = \dfrac{76}{160000}$, $P(N_a = 4) = \dfrac{1}{20^4}$.

3. X_a est une variable de Bernoulli de paramètre $P(N_a \geqslant 2) = \dfrac{2243}{160000} = p$. Soit G le gain, on a $G = \sum\limits_{a=1}^{20} aX_a$, donc
$$E(G) = p\frac{20\times 21}{2} = \frac{471030}{160000} \simeq 2,94$$

4. Quatre possibilités de gain :$P(88xy) = \dfrac{19\times 18\times 6}{20^4} = \dfrac{2052}{20^4}$, $P(888x) = P(N_8 = 3) = \dfrac{76}{20^4}$, $P(8888) = \dfrac{1}{20^4}$, et les trois $P(xxyy) = \dfrac{6}{20^4}$ avec $x > y$ et $x + y = 8$ (trois couples possibles). Total :
$$\frac{2052 + 76 + 1 + 3\times 6}{20^4} = \frac{2147}{160000} \simeq 1,34\%$$

5. Si je relance tout, l'espérance de gain est celle de G précédemment calculée.

Si je garde les deux 2, la probabilité du motif $22xx$, à $x \neq 2$ fixé, est $\frac{1}{20^2}$, et dans ce cas je gagne $2+x$, dans le cas contraire je gagne 2. Ainsi l'espérance de gain est

$$E(G') = \sum_{x\neq 2} \frac{2+x}{20^2} + \left(1 - \frac{19}{20^2}\right) \times 2 = \frac{1008}{400} = 2,52$$

Si je garde le 11, soit M_a le nombre de a dans les quatre lancers. Si $a \neq 11$, la loi de M_a est $P(M_a = 0) = \frac{19^3}{20^3}$, $P(M_a = 1) = \frac{3\times 19^2}{20^3}$, $P(M_a = 2) = \frac{3\times 19}{20^3}$, et $P(M_a = 3) = \frac{1}{20^3}$.
En particulier, $P(M_a \geqslant 2) = \frac{58}{2000}$. Pour M_{11}, on décale tout de 1 et on a $P(M_{11} \geqslant 2) = \frac{1141}{8000}$.
L'espérance de gain est alors

$$\begin{aligned} E(G'') &= \sum_{a\neq 11} a \times P(M_a \geqslant 2) + 11 \times P(M_{11} \geqslant 2) \\ &= \frac{199\times 58 + 11\times 1141}{8000} = \frac{24093}{8000} \simeq 3,01 \end{aligned}$$

Conclusion : il est préférable de garder le 11, mais de peu. Il n'est pas intéressant de garder les 2...

6. Si je relance tout, l'espérance de gain est $g_0 = \frac{471030}{160000}$.
Si je garde a_1, l'espérance de gain est (cf les calculs précédents) :

$$g_1(a_1) = \frac{(210 - a_1)\times 58 + 1141 \times a_1}{8000} = \frac{12180 + 1083a_1}{8000}$$

Si je garde $a_1 > a_2$, l'espérance est

$$\begin{aligned} g_2(a_1, a_2) &= \frac{1}{400} \times (210 - a_1 - a_2) && (\text{motif } a_1a_2xx) \\ &= \frac{38}{400} \times (a_1 + a_2) && (\text{motif } a_1a_2a_kx) \\ &= \frac{2}{400} \times (a_1 + a_2) && (\text{motif } a_1a_2a_1a_2) \end{aligned}$$

et ainsi $g_2(a_1, a_2) = \frac{210 + 39(a_1+a_2)}{400}$.
Si je garde $a_1 > a_2 > a_3$, l'espérance est $g_3(a_1, a_2, a_3) = \frac{a_1+a_2+a_3}{20}$.
Enfin, si je garde tout, je ne gagne rien.

On résout les inégalités :

$$g_1 \geqslant g_0 \Longleftrightarrow a_1 \geqslant 10,5$$

$$g_2 \geqslant g_0 \Longleftrightarrow a_1 + a_2 \geqslant \frac{387030}{15600} \simeq 24,8$$

$$g_3 \geqslant g_0 \Longleftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 \geqslant \frac{471030}{8000} \simeq 58,88 \quad \text{impossible !}$$

Enfin $g_2 \geqslant g_1 \Longleftrightarrow 780a_2 \geqslant 7980 + 303a_1$, mais comme $a_2 \leqslant a_1 - 1$, l'inégalité $g_2 \geqslant g_1$ implique que $780(a_1 - 1) \geqslant 7980 + 303a_1$ et donc que $a_1 \geqslant 18,36$.

Pour résumer, la démarche est la suivante : si $a_2 \geqslant 18$, garder a_1 et a_2. Sinon, si $a_1 \geqslant 11$, garder uniquement a_1. Sinon tout rejouer.

Exercice III

1. (a) a et b étant premiers entre eux, il en est de même pour a et $a+b$; il s'en suit que ka n'est divisible par $a+b$ que si $a+b$ divise k, et par conséquent les entiers r_k, $1 \leqslant k \leqslant a+b-1$, sont bien éléments de $[\![1, a+b-1]\!]$.

   Il suffit donc de montrer que ces entiers sont distincts. Or $r_k = r_l$ si, et seulement si, $a+b$ divise $a(k-l)$, c'est à dire $a+b$ divise $(k-l)$, soit $k=l$ puisque $|k-l| < a+b$.

   (b) La différence $r_{k+1} - r_k$ vaut a ou $-b$ selon que r_k est inférieur ou supérieur à b.

   Donc $U(r_k) = U(r_{k+1})$ et d'après ce qui précède et une récurrence finie, U est constante égale à $U(a)$ sur $[\![1, a+b-1]\!]$.

   Supposons $U(j)$ définie pour un $j \geqslant a+b$. Il existe q entier tel que $j = aq+r$ avec $1 \leqslant r \leqslant a$ donc $r \in [\![1, a+b-1]\!]$. Alors $U(j) = U(r) = U(a)$.

2. Posons $a = da'$, $b = db'$ et soit i dans $[\![1, d]\!]$.

   La suite qui à k associe $u_{i+(k-1)d}$ est définie pour $i+(k-1)d \leqslant a+b-d$ donc en particulier pour k dans $[\![1, a'+b'-1]\!]$. Elle admet a' et b', qui sont premiers entre eux, pour période, donc, d'après la question précédente, elle est constante. C'est le résultat annoncé.

3. (a) Puisque b est au moins égal à 2, on a $r_1 = a < a+b-1$. L'entier m tel que $r_m = a+b-1$ est donc au moins égal à 2.

   Par ailleurs $r_{a+b-1} = b < a+b-1$, donc m est au plus égal à $a+b-2$.

   Prenons $A = \{r_1 = a, r_2, \ldots, r_{m-1} = b-1\}$ et $B = \{r_{m+1} = a-1, r_{m+2}, \ldots, r_{a+b-1} = b\}$. A et B sont non vides et la suite V n'est pas constante.

   Montrons que V est de période a. Soit i un entier au plus égal à $a+b-2-a = b-2$. On a donc $i = r_k$ avec $k \neq m-1$ et $k \neq a+b-1$ donc si i est dans A (respectivement B), il en est de même pour $i+a = r_{k+1}$.

   Montrons que V est de période b. Soit i un entier au plus égal à $a+b-2-b = a-2$. On a donc, pour un certain k, $i = r_k$, reste de la division de $r_{k-1}+a$ par $a+b$. On constate pareillement que si i est dans A (respectivement B), il en est de même pour $i+b = r_{k-1}$.

   (b) La décomposition est unique à l'échange près de A et B car les propriétés de périodicité font que si par exemple $a = r_1 \in A$, alors r_2,..., r_{m-1} sont dans A.

   La suite $k \mapsto V(a+b-1-k)$ possède les mêmes propriétés que V. Par unicité elle est égale à V : V est un *palindrome*.