CORRIGÉ

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Classes de terminale S • 2005

Source • igmaths

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2005

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

Durée : 5 heures

La calculatrice de poche est autorisée, conformément à la réglementation.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte quatre exercices indépendants.

Il n'est pas obligatoire de traiter systématiquement les questions dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement la question traitée en respectant l'indexation du texte.

Pour poursuivre, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Exercice 1

I-1. s et s' sont des similitudes indirectes, donc leur composée $r = s' \circ s$ est une similitude directe. C'est de plus une isométrie comme composée d'isométries.

Par ailleurs, I est un point fixe de r, donc r est une rotation de centre I. Soit θ son angle.

Pour un point M de D, différent de I, D' est bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{Ir(M)}\right)$ donc θ est le double de l'angle $(\overrightarrow{u_D}, \overrightarrow{u_{D'}})$ de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_D}$ et $\overrightarrow{u_{D'}}$ des droites D et D'.

I-2. (a) D'après la question précédente : $s_2 \circ s_1 = r^2$ et $s_3 \circ s_1 = r$.

Toute symétrie axiale est sa propre réciproque. Ainsi :

$$\begin{cases} M_2 = s_2(M) = s_2 \circ s_1(M_1) = r^2(M_1) \\ M_3 = s_3(M) = s_3 \circ s_1(M_1) = r(M_1) \end{cases}$$

(b) $M_1M_2M_3$ est donc un triangle équilatéral indirect de centre O.

II-1. M_1 est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses, donc d'affixe $\overline{z} = \rho e^{-\mathrm{i}\theta}$.

$M_2 = r^2(M_1)$ donc M_2 est d'affixe $e^{4\mathrm{i}\pi/3}\overline{z} = j^2\overline{z}$.

$M_3 = r(M_1)$ donc M_3 est d'affixe $e^{2\mathrm{i}\pi/3}\overline{z} = j\overline{z}$.

II-2. Notons s la symétrie axiale d'axe (BC). J est l'intersection de (OA) et (BC), et ces deux droites sont orthogonales donc $\quad s \circ s_1 = s_J$

où s_J la symétrie de centre J (qui est aussi la rotation de centre J d'angle de mesure π).

Ainsi $s = s_J \circ s_1$ donc $M_4 = s_J\left(s_1(M)\right) = s_J(M_1)$: J est le milieu du segment $[M_1, M_4]$.

M_4 a pour d'affixe $-1 - \overline{z} = -1 - \rho e^{-\mathrm{i}\theta}$.

II-3. (a) On prend $z \neq 0$ i.e. $M \neq O$.

M_2, M_3 et M_4 sont alignés si et seulement si $S = \dfrac{(-1-\overline{z}) - j\overline{z}}{j^2\overline{z} - j\overline{z}}$ est réel.

Or : $S = \dfrac{-1 + j^2\overline{z}}{-\mathrm{i}\sqrt{3}\overline{z}}$ donc M_2, M_3 et M_4 sont alignés si et seulement si :

$$\frac{-1 + j^2\overline{z}}{-\mathrm{i}\overline{z}} = \frac{-1 + jz}{\mathrm{i}z}.$$

Ceci est équivalent à : $z + \overline{z} = (j^2 + j)\,|z|^2$ et en posant $z = x + \mathrm{i}y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on obtient la condition équivalente : $\quad 2x = -x^2 - y^2$ soit $(x+1)^2 + y^2 = 1$.

L'ensemble des points M tels que M_2, M_3 et M_4 soient alignés est donc le cercle de centre ω d'affixe -1 et de rayon 1 (O y compris, car dans ce cas particulier, M_2 et M_3 sont confondus).

(b) Ω doit être sur la médiatrice de $[M_2, M_3]$. Le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral de centre O donc celle-ci est la droite (OM_1).

(c) λ est déterminé par le fait que $\Omega M_3 = \Omega M_4$, i.e. $\left|\rho j e^{-\mathrm{i}\theta} - \lambda e^{-\mathrm{i}\theta}\right| = \left|-1 - \rho e^{-\mathrm{i}\theta} - \lambda e^{-\mathrm{i}\theta}\right|$.

Ceci est équivalent à : $\lambda^2 + \rho^2 + \lambda\rho = (\lambda + \rho)^2 + 1 + 2(\lambda + \rho)\cos\theta$

soit à $\lambda\rho + 1 + 2(\lambda + \rho)\cos\theta = 0$ ou à $\lambda = \dfrac{-1 - 2\rho\cos\theta}{\rho + 2\cos\theta}$.

(L'ensemble des points tels que $\rho = -2\cos\theta$ est le cercle de centre -1 de rayon 1).

(d) Ainsi $R = \Omega M_2 = \sqrt{\lambda^2 + \rho^2 + \lambda\rho}$ avec λ ci-dessus.

(e) $R^2 = 1$ si et seulement si $\lambda^2 + \rho^2 + \lambda\rho = 1$ ce qui est équivalent à

$(1 + 2\rho\cos\theta)^2 + \rho^2\left(\rho + 2\cos\theta\right)^2 - \rho\left(1 + 2\rho\cos\theta\right)\left(\rho + 2\cos\theta\right) = \left(\rho + 2\cos\theta\right)^2$

soit à $1 + 4\rho^2\cos^2\theta + 2\rho\cos\theta + \rho^4 + 2\rho^3\cos\theta - \rho^2 = \rho^2 + 4\cos^2\theta + 4\rho\cos\theta$

ou à $\rho^4 - 2\rho^2 + 1 + 2\rho\left(\rho^2 - 1\right)\cos\theta + 4\left(\rho^2 - 1\right)\cos^2\theta = 0$,

équivalent à : $\left(\rho^2 - 1\right)\left(\rho^2 + 2\rho\cos\theta + 4\cos^2\theta - 1\right) = 0$.

Comme ρ est positif, ceci est équivalent $\rho = 1$ ou $(\rho + \cos\theta)^2 + 3\cos^2\theta - 1 = 0$

ce qui donne la relation demandée.

II-4. La condition demandée s'écrit $R = \rho$, équivalent à :

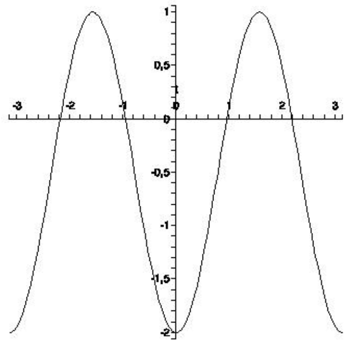
$$1 + 4\rho^2\cos^2\theta + 2\rho\cos\theta + \rho^4 + 2\rho^3\cos\theta - \rho^2 = \rho^4 + 4\rho^2\cos^2\theta + 4\rho^3\cos\theta$$

soit à $\left(1 - \rho^2\right)\left(1 + 2\rho\cos\theta\right) = 0$.

On obtient donc la réunion du cercle de centre O de rayon 1 et de la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ qui est la droite (BC). Lorsque M est sur la droite, les cercles circonscrits à $M_1M_2M_3$ et $M_2M_3M_4$ sont confondus, de centre O de rayon OM, et lorsque M est sur le cercle trigonométrique, les deux cercles sont symétriques par rapport à (M_2M_3).

III-1. Par parité, il suffit de faire l'étude sur $[0, \pi]$.

a) s est dérivable sur $[0, \pi]$ et $s'(\theta) = 6\cos\theta \sin\theta = 3\sin(2\theta)$ donc s est croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ (ce que l'on pourrait voir directement avec les variations de cos).



$s(\theta)$ s'annule lorsque $\cos\theta$ vaut $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ou $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, est positif lorsque $\cos\theta$ est dans $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$, négatif sinon.

Comme cos est continue strictement décroissante sur $I = [0, \pi]$ et puisque $\cos(I) = [-1, 1]$ contient $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, il existe un unique réel $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Alors $\cos(\pi - \alpha)$ est l'unique réel de $[0, \pi]$ pour lequel cos prend la valeur $\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$.

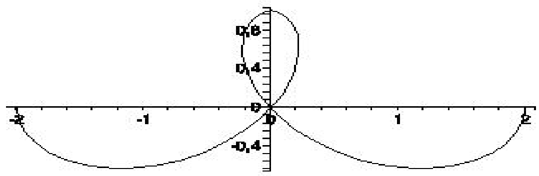
s est donc négatif sur $[0, \alpha]$ et $[\pi - \alpha, \pi]$, positif sur $E' = [\alpha, \pi - \alpha]$.

Par parité, on en déduit : $E = [-\pi + \alpha, -\alpha] \cup [\alpha, \pi - \alpha]$

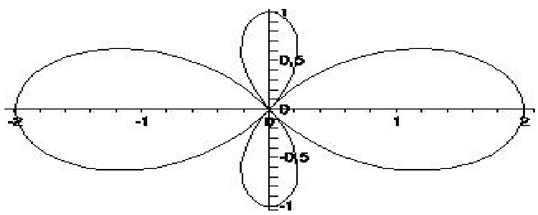
(b) L'étude précédente conduit au tableau de valeurs :

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	α	$\pi/3$	$\pi/2$		$\pi - \alpha$		π
$s(\theta)$	-2	$-7/2$	$-1/2$	0	$1/4$	1		0		-2

La propriété $s(\theta) = s(-\theta)$ assure que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
La propriété $s(\theta) = s(\pi - \theta)$ assure que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Tracé sur $[0, \pi]$



Tracé sur $[-\pi, \pi]$

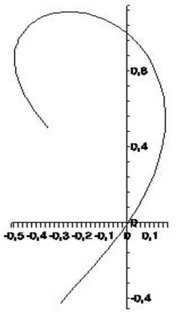
III-2. (a) Par parité, on étudie r_1 sur $[\alpha, \pi - \alpha]$.

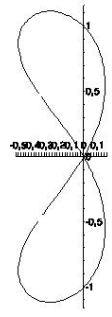
$r_1(\theta)$ est nul si et seulement si $\begin{cases} 1 - 3\cos^2\theta = \cos^2\theta \\ \cos\theta \geqslant 0 \end{cases}$ soit en $\dfrac{\pi}{3}$.

(b) On obtient le tableau :

θ	α	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi - \alpha$
$r_1(\theta)$	$-1/\sqrt{3}$	0	1	$1/\sqrt{3}$

et $r_1(\theta) = r_1(-\theta)$ assure que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
Ceci donne le tracé, successivement sur $[\alpha, \pi - \alpha]$ puis sur E :



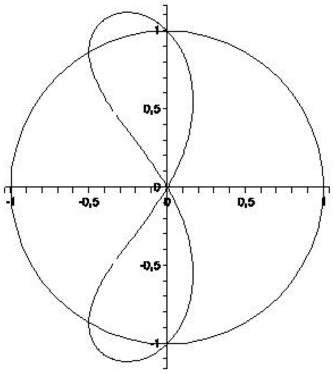


III-3. Dans la partie II, prendre le point M d'affixe $z = \rho' e^{i\theta'}$ avec $\rho' < 0$ revient à travailler avec $z = \rho e^{i\theta}$ où $\rho = -\rho'$ et $\theta = \pi + \theta'$.
La condition $(\rho + \cos\theta)^2 = 1 - 3\cos^2\theta$ est alors équivalente à $(\rho' + \cos\theta')^2 = 1 - 3\cos^2\theta'$.
$\rho = 1$ ou $\rho = -1$ est toujours une équation du cercle trigonométrique.

Prendre ρ dans $\mathbb{R}^+$ ou dans $\mathbb{R}$ ne change donc rien à la partie II, et l'ensemble trouvé en II.3.e est la réunion du cercle de centre O et de rayon 1, de la courbe précédente et de la courbe définie par

$$r_2(\theta) = -\sqrt{1 - 3\cos^2(\theta)} - \cos\theta.$$

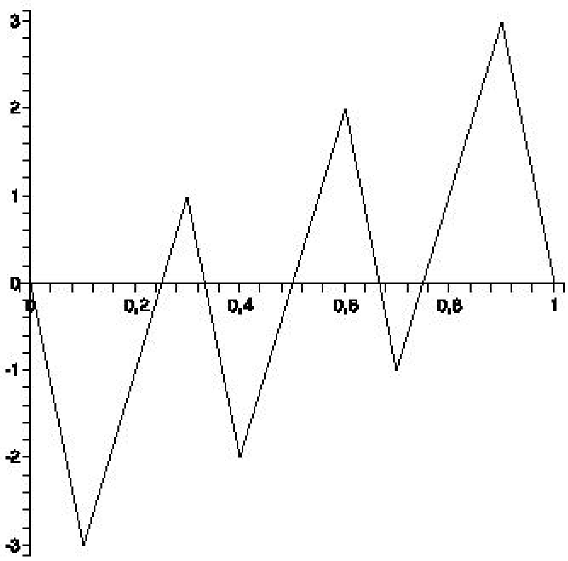
Mais comme $r_2(\theta) = -r_1(\pi - \theta)$, les courbes définies par r_1 et r_2 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
La courbe définie par r_2 est donc celle définie par r_1.



Exercice 2

1. La fonction $g : x \mapsto f\left(x + \frac{3}{10}\right) - f(x)$ est continue sur $\left[0, \frac{7}{10}\right]$ et jamais nulle, donc de signe constant sinon elle s'annulerait d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Supposons par exemple que :
$$\forall x \in \left[0, \frac{7}{10}\right], f\left(x + \frac{3}{10}\right) - f(x) > 0.$$
Alors : $\begin{cases} 0 = f(0) < f\left(\frac{3}{10}\right) < f\left(\frac{6}{10}\right) < f\left(\frac{9}{10}\right) \\ f\left(\frac{1}{10}\right) < f\left(\frac{4}{10}\right) < f\left(\frac{7}{10}\right) < f(1) = 0 \end{cases}$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule donc sur $\left]\frac{1}{10}, \frac{3}{10}\right[$, sur $\left]\frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right[$, sur $\left]\frac{4}{10}, \frac{6}{10}\right[$, sur $\left]\frac{6}{10}, \frac{7}{10}\right[$ et sur $\left]\frac{7}{10}, \frac{9}{10}\right[$. En rajoutant 0 et 1, cela donne au moins 7 annulations.
2. Comme exemple d'une telle fonction, il suffit de prendre l'application continue affine par morceaux définie par :

$f(0) = 0$, $f\left(\frac{1}{10}\right) = -3$, $f\left(\frac{3}{10}\right) = 1$, $f\left(\frac{4}{10}\right) = -2$, $f\left(\frac{6}{10}\right) = 2$, $f\left(\frac{7}{10}\right) = -1$, $f\left(\frac{9}{10}\right) = 3$, $f(1) = 0$
qui vérifie $f\left(x + \frac{3}{10}\right) - f(x) = 1$
pour tout $x \in \left[0, \frac{7}{10}\right]$.



Exercice 3

1. On se place dans un repère orthonormal direct tel que B ait pour coordonnées $(0,0)$, C ait pour coordonnées $(a,0)$, $a>0$, et on note θ_1 (resp. θ_2) l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA_0}\right)$ (resp. $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA_0}\right)$).

   Alors A_k est le point tel que : $\begin{cases} \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA_k}\right) = \theta_1/2^k \\ \left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA_k}\right) = \theta_2/2^k \end{cases}$

   donc A_k est le point d'intersection des droites d'équations $\begin{cases} y = \tan\left(\dfrac{\theta_1}{2^k}\right)x \\ y = \tan\left(\dfrac{\theta_2}{2^k}\right)(x-a) \end{cases}$.

   Ainsi, A_k a pour coordonnées : $\begin{cases} x_k = \dfrac{-\tan\left(\theta_2/2^k\right)a}{\tan\left(\theta_1/2^k\right)-\tan\left(\theta_2/2^k\right)} \xrightarrow{k\to+\infty} \dfrac{\theta_2 a}{\theta_2-\theta_1} \\ y_k = \tan\left(\dfrac{\theta_1}{2^k}\right)x_k \xrightarrow{k\to+\infty} 0 \end{cases}$

   ce qui donne le point A, de coordonnées $\left(\dfrac{\theta_2 a}{\theta_2-\theta_1},0\right)$.

2. Supposons A_1 différent de A_0.
   A_1 est l'intersection des hauteurs de A_0BC. Par définition, CA_1 est donc orthogonal à BA_0, ce qui signifie que BA_0 est une hauteur de BCA_1.
   Par ailleurs, A_0BC et A_1BC ont en commun la hauteur A_0A_1.
   BA_0 et A_0A_1 s'intersectent en A_0, donc A_0 est l'orthocentre de A_1BC : $A_0 = A_2$.
   Finalement, pour tout $k\in\mathbb{N}$: $A_{2k} = A_0$ et $A_{2k+1} = A_1$.
   Dans le cas particulier $A_0 = A_1$ (triangle rectangle en A_0), la suite est constante égale à A_0.

Exercice 4

I-1. 1 ne convient pas.
$\left(2^k \bmod 7\right)$, $k\in\mathbb{N}$, vaut alternativement 1, 2 et 4 donc 2 ne convient pas.
$\left(3^k \bmod 7\right)$, $k\in\mathbb{N}$, vaut successivement 1, 3, 2, 6, 4, 5 pour $k\in[\![0,5]\!]$ donc 3 est une racine primitive modulo 7.
$\left(4^k \bmod 7\right)$, $k\in\mathbb{N}$, vaut 1, 4 ou 2 donc 4 ne convient pas.
$\left(5^k \bmod 7\right)$, $k\in\mathbb{N}$, vaut successivement 1, 5, 4, 6, 2, 3 pour $k\in[\![0,5]\!]$ donc 5 est racine primitive modulo 7.
$\left(6^k \bmod 7\right)$, $k\in\mathbb{N}$, vaut alternativement 1 et 6 donc 7 ne convient pas.

I-2. (a) Soit $k \geqslant p-1$.
En faisant la division euclidienne de k par $p-1$, il existe $q\in\mathbb{N}$ et $r\in[\![0,p-2]\!]$ tels que :
$$k = q(p-1)+r.$$
D'après le petit théorème de Fermat : $g^{p-1} = 1 \pmod{p}$ donc $g^k = g^r \pmod{p}$.
Alors : $\left\{\left(g^k \bmod p\right) \mid k\in\mathbb{N}\right\} = \{(g^r \bmod p) \mid r\in[\![0,p-2]\!]\}$ et comme g est racine primitive modulo p, les $\left(g^i \bmod p\right)$, $i\in[\![0,p-2]\!]$, décrivent $[\![1,p-1]\!]$.

(b) On remarque que $[\![1,p-1]\!]$ contient $p-1$ éléments, et que lorsque r parcourt $[\![0,p-2]\!]$, on a $p-1$ valeurs de g^r, donc il existe, pour chaque $A\in[\![1,p-1]\!]$, exactement un élément $r\in[\![0,p-2]\!]$ tel que :
$$A = (g^r \bmod p).$$

(c) Si b est congru à a modulo $p-1$, il existe k tel que $b = a+k(p-1)$.
Comme $g^{p-1} = 1 \pmod{p}$: $\left(g^b \bmod p\right) = (g^a \bmod p) = A$.

I-3. (a) Initialisations : $y \leftarrow 1$, $i \leftarrow 0$
Tant que $y \neq A$ faire
– $y \leftarrow g * y \pmod{p}$
– $i \leftarrow i+1$

fin Tant que
Renvoyer i

(b) $\ell(40) = 18$.

II-1. $54 = 2 \times 3^3$ donc $g^{75} = g^{60} g^{15} = g^{60}\left(g^5\right)^3$ est égal, modulo 113, à 54.
Ainsi : $\ell(54) = 75$.

II-2. Posons $q_j = \ell(p_j)$. Alors $p_j = g^{q_j}$ (modulo p) donc $g^{a_i} = g^{q_1 e_{i,1} + q_2 e_{i,2} + \cdots + q_n e_{i,n}}$ (modulo p).
Deux entiers k et l, avec par exemple $k > l$, sont tels que $g^k = g^l$ (modulo p) si et seulement si $g^{k-l} = 1$ (modulo p) puique g^l est premier avec p.
Soit r le reste de la division euclidienne de $k - l$ par $p - 1$: g^{k-l} est égal à g^r modulo p, et g^r est égal à 1 si et seulement si $r = 0$ (cf. 2.b) donc g^k et g^l sont égaux modulo p si et seulement si :

$$k = l \pmod{(p-1)}.$$

Ainsi : $a_i = e_{i,1}\ell(p_1) + e_{i,2}\ell(p_2) + \cdots + e_{i,n}\ell(p_n)$ (modulo $(p-1)$).

II-3. (a) $\begin{cases} g = 2^2 \times 5 \pmod{53} \\ g^3 = 2 \times 5^2 \pmod{53} \end{cases}$ donc $\begin{cases} 2\ell(2) + \ell(5) = 1 \pmod{52} \\ \ell(2) + 2\ell(5) = 3 \pmod{52} \end{cases}$

En soustrayant la deuxième ligne à deux fois la première : $3\ell(2) = -1$ (modulo 52).
3 est premier avec 52 : il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $3u + 52v = 1$ soit $3u = 1$ (modulo 52).
On sait déterminer u par l'algorithme d'Euclide et on trouve -17 donc $\ell(2) = 17$.
On en déduit que : $\ell(5) = 1 - 2\ell(2)$ (modulo 52) donc $\ell(5) = 19$.

(b) $A = 2^3 \times 5$ donc $\ell(40) = 3\ell(2) + \ell(5)$ (modulo 52) : $\ell(40) = 18$.

(c) Il s'agit de déterminer le nombre de couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ tels que $2^\alpha 5^\beta$ est inférieur à 52.
Pour $\beta = 0$, α peut varier entre 0 et 5 soit 6 couples.
Pour $\beta = 1$: α varie entre 0 et 3 d'où 4 couples.
Pour $\beta = 2$: α vaut 0 ou 1 d'où 2 couples.
Finalement, il y a 12 entiers dans $[\![1, 52]\!]$ qui se factorisent en fonction de 2 et 5.

II-4. (a) A est inversible modulo p et les $(g^s \bmod p)$ décrivent $[\![1, p-1]\!]$ donc les $(g^s A \bmod p)$ aussi ; en particulier, il existe (au moins) un entier s tel que $(g^s A \bmod p)$ se factorise à l'aide de $p_1, \cdots, p_n$ uniquement.

(b) Si on a choisi un tel s : il existe des entiers $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tels que $(g^s A \bmod p) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$
donc $s + \ell(A) = \alpha_1 \ell(p_1) + \cdots + \alpha_n \ell(p_n)$ (modulo $(p-1)$)
d'où $\ell(A) = \alpha_1 \ell(p_1) + \cdots + \alpha_n \ell(p_n) - s$ (modulo $(p-1)$).

(c) Pour $A = 30$, on peut prendre $s = 3$:

$$(g^s A \bmod 53) = 2^4 \text{ donc } s + \ell(A) = 4\ell(2) \pmod{52}.$$

Finalement : $\ell(30) = 13$.

II-5. (a) Les puissances de p_1 dans $[\![1, p-1]\!]$ sont $1, p_1, \cdots, p_1^{k_1}$ où $k_1 = \mathrm{E}\left(\dfrac{\ln(p-1)}{\ln p_1}\right)$.
Il y en a donc $\mathrm{E}\left(\dfrac{\ln(p-1)}{\ln p_1}\right) + 1$.

(b) Lorsque s décrit $[\![0, p-2]\!]$, $g^s A \pmod p$ décrit (exactement une fois) $[\![1, p-1]\!]$.
La probabilité demandée est le nombre d'entiers qui conviennent divisé par le nombre $p - 1$ de cas soit $\dfrac{1}{p-1}\left(\mathrm{E}\left(\dfrac{\ln(p-1)}{\ln p_1}\right) + 1\right)$.
Elle est supérieure à $\dfrac{\ln(p-1)}{(p-1)\ln p_1}$.

(c) Pour i fixé, le nombre d'entiers de la forme $p_1^i p_2^j$ est le nombre d'entiers j tels que $p_2^j \leqslant \dfrac{p-1}{p_1^i}$,
soit le nombre d'entiers de $\left[0, \mathrm{E}\left(\dfrac{\ln \dfrac{(p-1)}{p_1^i}}{\ln p_2}\right)\right]$, qui est supérieur à $\dfrac{\ln \dfrac{(p-1)}{p_1^i}}{\ln p_2}$, donc le nombre d'entiers qui se factorisent en fonction de p_1 et p_2 est supérieur à

$$S = \frac{1}{\ln p_2} \sum_{i=0}^{k_1} \ln \frac{p-1}{p_1^i} \text{ où } k_1 = \mathrm{E}\left(\frac{\ln(p-1)}{\ln p_1}\right).$$

Or $S = \dfrac{1}{\ln p_2} \ln \dfrac{(p-1)^{k_1+1}}{p_1^{k_1(k_1+1)/2}} \geqslant \dfrac{\ln\left[(p-1)^{(k_1+1)/2}\right]}{\ln p_2} = \dfrac{(k_1+1)\ln(p-1)}{2\ln p_2} \geqslant \dfrac{(\ln(p-1))^2}{2(\ln p_1)(\ln p_2)}$.

Ainsi : $P \geqslant \dfrac{S}{p-1} \geqslant \dfrac{(\ln(p-1))^2}{2(p-1)(\ln p_1)(\ln p_2)}$.

Majoration : il suffit de majorer le nombre d'entiers q de $[\![1, p-1]\!]$ qui s'écrivent sous la forme $p_1^\alpha p_2^\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$.

Dans ce cas : $\ln q = \alpha \ln p_1 + \beta \ln p_2 \leqslant \ln(p-1)$ donc $\begin{cases} 0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\ln(p-1)}{\ln p_1} \\ 0 \leqslant \beta \leqslant \dfrac{\ln(p-1)}{\ln p_2} \end{cases}$.

Il y a donc au plus $\left(E\left(\dfrac{\ln(p-1)}{\ln p_1}\right)+1\right)\left(E\left(\dfrac{\ln(p-1)}{\ln p_2}\right)+1\right) \leqslant \left(\dfrac{\ln(p-1)}{\ln p_1}+1\right)\left(\dfrac{\ln(p-1)}{\ln p_2}+1\right)$ choix pour le couple (α, β), d'où le résultat.

(d) On généralise le travail fait précédemment.

Majoration : comme ci-dessus, la probabilité recherchée est majorée par $\dfrac{1}{p-1}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(\dfrac{\ln(p-1)}{\ln p_k}+1\right)$.

Minoration.

Montrons par récurrence sur n que, pour tout réel $x \geqslant 1$, le nombre d'entiers de $[1, x]$ qui se décomposent à l'aide de p_1, …, p_n uniquement est supérieur à $\dfrac{(\ln x)^n}{n!(\ln p_1)\cdots(\ln p_n)}$.

On l'a vu ci-dessus pour $n = 1$ et $n = 2$ (le fait que x était de la forme $p-1$ avec p premier n'intervenait pas).

Supposons le résultat vrai pour $n-1$ nombres premiers et passons à n.

Pour i_1 fixé, le nombre d'entiers inférieurs à x de la forme $p_1^{i_1}\left(p_2^{i_2}\cdots p_n^{i_n}\right)$ est le nombre d'entiers de la forme $p_2^{i_2}\cdots p_n^{i_n}$ inférieurs à $\dfrac{x}{p_1^{i_1}}$, donc est supérieur à $\dfrac{\left(\ln\left[x/p_1^{i_1}\right]\right)^{n-1}}{(n-1)!(\ln p_2)\cdots(\ln p_n)}$.

Le nombre d'entiers recherché dans $[1, x]$ est donc supérieur à $T = \displaystyle\sum_{i=0}^{k_1}\dfrac{\left(\ln\left[x/p_1^i\right]\right)^{n-1}}{(n-1)!(\ln p_2)\cdots(\ln p_n)}$ avec $k_1 = \mathrm{E}\left(\dfrac{\ln x}{\ln p_1}\right)$.

Soit $S = \displaystyle\sum_{i=0}^{k_1}\left(\ln\dfrac{x}{p_1^i}\right)^{n-1}$.

On remarque que, pour $i \leqslant k_1 - 1$: $\forall t \in [\ln x - (i+1)\ln p_1, \ln x - i\ln p_1]$, $t^{n-1} \leqslant \left(\ln\dfrac{x}{p_1^i}\right)^{n-1}$

donc $S \geqslant \left(\ln\dfrac{x}{p_1^{k_1}}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{\ln p_1}\displaystyle\int_{\ln x - k_1\ln p_1}^{\ln x} t^{n-1}\,\mathrm{d}t \geqslant \dfrac{1}{\ln p_1}\displaystyle\int_0^{\ln x} t^{n-1}\,\mathrm{d}t = \dfrac{(\ln x)^n}{n\ln p_1}$

d'où $T \geqslant \dfrac{(\ln x)^n}{n!(\ln p_1)\cdots(\ln p_n)}$ et on a l'hérédité.

Finalement, la probabilité pour qu'un entier de $[\![1, p-1]\!]$ se décompose en fonction de $p_1, \cdots, p_n$ uniquement est supérieure à $\dfrac{(\ln(p-1))^n}{n!(p-1)(\ln p_1)\cdots(\ln p_n)}$.