

www.freemaths.fr

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SUJET • Session de 2013

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Classes de terminale S

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2013

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 HEURES

<p>La calculatrice est autorisée conformément à la réglementation. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.</p>

Le sujet comporte trois problèmes indépendants.

Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

PROBLÈME I

De superbes suites

Dans ce problème, on considère des suites finies (a_1, a_2, \dots, a_n) d'entiers strictement positifs, où n est un entier supérieur ou égal à 2, appelé *longueur* de la suite finie.

On dit qu'une suite finie d'entiers strictement positifs est *superbe* si chacun de ses termes divise la somme de tous les termes.

Par exemple, la suite $(1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2)$ est superbe de longueur 8 car $1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 = 12$, qui est divisible par 1 et par 2; la suite $(3, 3, 6, 12)$ est superbe de longueur 4 car la somme des termes vaut 24, qui est multiple de 3, 6, 12.

- 1° Déterminer les entiers strictement positifs b tels que la suite $(21, 7, b)$ soit superbe.
- 2° a) Déterminer les suites superbes de longueur 2, puis celles de longueur 3.
b) Déterminer les suites superbes de longueur 4 et dont la somme des termes vaut 2013.
- 3° a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, il existe une suite superbe de longueur n dont les termes sont tous distincts.
b) Montrer que, si $n \geq 2$, il n'existe pas de suite superbe de longueur n dont les termes sont des nombres premiers tous distincts.
- 4° Soit (a_1, a_2, \dots, a_n) une suite arithmétique finie de raison strictement positive.
Montrer que si cette suite est superbe alors $n = 3$.
- 5° On dit qu'une suite (infinie) $(a_k)_{k \geq 1}$ d'entiers strictement positifs est *magnifique* si, pour tout entier $n \geq 2$, la suite finie (a_1, a_2, \dots, a_n) est superbe.
Déterminer les suites magnifiques $(a_k)_{k \geq 1}$ vérifiant $a_k < a_{k+1}$ pour tout entier $k \geq 2$.
- 6° Soit n un entier supérieur ou égal à 4, et soit (a_1, a_2, \dots, a_n) une suite finie, pas forcément superbe, d'entiers strictement positifs tous distincts.
a) Montrer qu'il est possible de prolonger la suite de façon à obtenir une suite superbe.
b) Montrer qu'il est possible de prolonger la suite de façon à obtenir une suite superbe dont les termes sont tous distincts.

PROBLÈME II

Tiré à quatre épingles

- 1° Dans l'espace, soit D_1, D_2 deux droites non coplanaires et soit M un point n'appartenant ni à D_1 ni à D_2 . Montrer qu'il existe au plus une droite passant par M et coupant à la fois D_1 et D_2 . Dans quel cas n'en existe-t-il aucune ?

L'espace étant muni d'un repère orthonormé, soit $ABCDEFGH$ le cube dont les sommets ont pour coordonnées $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 1, 0)$, $D(0, 1, 0)$, $E(0, 0, 1)$, $F(1, 0, 1)$, $G(1, 1, 1)$, $H(0, 1, 1)$. Soit respectivement D_1, D_2 et D_3 les droites (EF) , (BC) et (DH) .

Enfin, soit \mathcal{S} l'ensemble des points de coordonnées $M(x, y, z)$ tels que

$$xy + yz + zx - (x + y + z) + 1 = 0.$$

- 2° Donner une représentation paramétrique de chacune des droites D_1, D_2 et D_3 .
- 3° Montrer que les droites D_1, D_2 et D_3 sont incluses dans \mathcal{S} .
- 4° Montrer que toute droite de l'espace non incluse dans \mathcal{S} rencontre \mathcal{S} en 0, 1 ou 2 points.
- 5° En déduire que toute droite coupant les droites D_1, D_2 et D_3 est incluse dans \mathcal{S} .
- 6° Soit D_4 une droite qui ne rencontre aucune des droites D_1, D_2, D_3 et qui n'est pas incluse dans \mathcal{S} .
Montrer qu'il existe au plus deux droites de l'espace coupant les quatre droites D_1, D_2, D_3, D_4 .

PROBLÈME III

Il faut passer les premiers

Pour ce problème, on donne la liste des vingt-cinq nombres premiers inférieurs à 100 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Pour faire une réussite, Sisyphe a dessiné au sol 106 cases numérotées de 0 à 105, et il dispose d'un jeton et d'un dé à six faces (équilibré).

Sisyphe commence la réussite en posant le jeton sur la case 0. Il fait ensuite une série de lancers du dé ; lorsque le dé affiche la valeur k , il avance le jeton de k cases et :

- s'il atteint ou dépasse la case numéro 100, Sisyphe a gagné ;
- s'il arrive à une case dont le numéro est un nombre premier inférieur à 100, Sisyphe a perdu ;
- dans les autres cas, Sisyphe relance le dé et continue la réussite.

1° Dans cette question, on suppose que Sisyphe recommence une réussite lorsqu'il a perdu.

On note p_n la probabilité de gagner au moins une réussite en au plus n lancers du dé.

- a) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $p_n > 0$.
- b) Étudier la convergence de la suite (p_n) .

Dans la suite du problème, Sisyphe ne recommence plus la réussite s'il perd.

Soit X la variable aléatoire représentant la position du jeton à la fin de la réussite.

On note $P(X = k)$ la probabilité de l'événement $X = k$.

2° a) Déterminer $P(X = 2)$, $P(X = 3)$, $P(X \geq 4)$, $P(X = 5)$.

b) Proposer un algorithme pour calculer $P(X = k)$ pour tout $k \in \{0, \dots, 105\}$.

3° Muni d'une calculatrice qui n'est pas assez performante pour exécuter l'algorithme précédent, Sisyphe cherche à estimer sa probabilité de gain. Pour cela, étant donné deux nombres premiers consécutifs $p < p'$, il considère α_p la probabilité conditionnelle de l'événement $X = p'$ sachant l'événement $X > p$.

- a) Que valent α_2 et α_3 ?
- b) Donner l'expression de la probabilité de gain, $P(G) = P(X \geq 100)$, en fonction des nombres réels α_p pour $p = 2, 3, 5, \dots$
- c) Donner un encadrement des nombres α_p et en déduire un encadrement de $P(G)$. (Dans cette question, la qualité de l'encadrement sera un élément d'appréciation.)

* *
*