www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 3

FRANCE MÉTROPOLITAINE

2025

Questionnaire à Choix Multiple

RÉPONSES F V F V

1. La suite (U_n) converge vers $\frac{1}{5}$?

Pour répondre à cette question, nous allons calculer **la lim de U_n en $+\infty$**.

Pour tout entier naturel: $U_n = \dfrac{1+5^n}{2+3^n}$.

Or: $$\frac{1+5^n}{2+3^n} = \frac{5^n\left(\dfrac{1}{5^n}+1\right)}{3^n\left(\dfrac{2}{3^n}+1\right)}$$

$$= \left(\frac{5}{3}\right)^n \times \left[\frac{\dfrac{1}{5^n}+1}{\dfrac{2}{3^n}+1}\right]$$

$$= \left(\frac{5}{3}\right)^n \times \left[\frac{\left(\dfrac{1}{5}\right)^n+1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1}\right].$$

Comme $\frac{1}{5} \in]0; 1[$ et $\frac{2}{3} \in]0; 1[$: • $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

• $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$

Ainsi: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n \times \left[\frac{1}{1}\right]$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n$

$= +\infty.$

Donc la suite ne converge pas vers $\frac{5}{3}$: elle est divergente.

L'affirmation 1 est donc: Fausse.

2. Pour tout entier naturel n, $W_n \geqslant n$?

Ici: $\begin{cases} \bullet\ W_{n+1} = 3W_n - 2n + 3 \\ \bullet\ W_0 = 0 \\ \bullet\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $W_n \geqslant n$ ".

Initialisation: $W_0 \geqslant 0$?

D'après l'énoncé: $W_0 = 0$.

Nous avons donc bien: $W_0 = 0 \geqslant 0$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $W_n \geqslant n$ et montrons qu'alors $W_{n+1} \geqslant n + 1$.

Supposons: $W_n \geqslant n$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

D'où: (1) => $3 \times W_n \geqslant 3 \times n$

=> $3\, W_n - 2\, n + 3 \geqslant 3n - 2n + 3$

=> $W_{n+1} \geqslant n + 3 \geqslant n + 1$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $W_n \geqslant n$.

L'affirmation 2 est donc: **Vraie**.

3. f est convexe sur $]\,0\,;+\infty\,[$?

D'après le cours: sur $]\,0\,;+\infty\,[$, f est convexe ssi $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes.

Or au point A, $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de sa tangente: f n'est donc pas convexe.

L'affirmation 3 est donc: Fausse.

4. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\ln(x) - x + 1 \leqslant 0$?

• Étudions la convexité de f sur $]0; +\infty[$:

Ici, posons: • $f(x) = \ln(x)$

• $\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$.

f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ et nous pouvons donc calculer f' et f''.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$: • $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

• $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Comme pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f''(x) < 0$, f est strictement concave sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

• Déterminons l'équation de la tangente au point d'abscisse 1:

L'équation réduite de la tangente T au point d'abscisse $x_A = 1$ s'écrit:

$$y = f'(x_A) \times (x - x_A) + f(x_A)$$

cad $y = f'(1) \times (x - 1) + f(1)$

ou encore $y = x - 1$.

L'équation la tangente T au point $x_A = 1$ est donc: $y = x - 1$.

• On conclu !

Comme f est strictement concave sur $]0;+\infty[$: $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de toutes ses tangentes.

Donc, en particulier, $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de la tangente T.

Ainsi, pour tout $x \in]0;+\infty[$, nous pouvons écrire:

$$f(x) \leqslant x - 1 \iff \ln(x) \leqslant x - 1$$

$$\iff \ln(x) - x + 1 \leqslant 0.$$

L'affirmation 4 est donc: Vraie.