BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 2

MAYOTTE, RÉUNION
2025

UN PEU DE GÉOMÉTRIE...

CORRECTION

Préalable:

- $A(-1;2;1)$, $B(1;-1;2)$ et $C(1;1;1)$.

- Une représentation paramétrique de (d) est $\begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2t \\ y = 2 + t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - t \end{cases}$

- Une représentation paramétrique de (d') est $\begin{cases} x = s \\ y = \frac{3}{2} + s, \quad s \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - 2s \end{cases}$

PARTIE A

1. Montrons que (d) et (d') sont sécantes au point $S\left(-\frac{1}{2}; 1; 4\right)$:

Pour répondre à cette question, nous allons résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2} + 2t = s & (1) \\ 2 + t = \dfrac{3}{2} + s & (2) \\ 3 - t = 3 - 2s & (3) \end{cases} \qquad (I)$$

$$(I) \iff \begin{cases} 2t - s = -\dfrac{3}{2} & \\ s = -\dfrac{1}{2} & (2) + (3) \\ -2t + 4s = 0 & 2 \times (3) \end{cases} \iff \begin{cases} 3s = -\dfrac{3}{2} & (1) + 2 \times (3) \\ s = -\dfrac{1}{2} & \\ t = 2s & \end{cases}.$$

On trouve ainsi: $t = -1$ et $s = -\dfrac{1}{2}$.

Les droites (d) et (d') sont donc sécantes en:

$$S\left(\frac{3}{2} + 2 \times (-1) ; 2 + (-1) ; 3 - (-1)\right)$$

cad $S\left(-\dfrac{1}{2} ; 1 ; 4\right)$.

S est donc bien le point d'intersection.

Au total, les droites (d) et (d') sont bien sécantes en $S\left(-\frac{1}{2}, 1, 4\right)$.

2. a. Montrons que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC):

Étape 1: les points A, B et C définissent-ils un plan ?

D'après le cours, les points A, B et C définissent un plan ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Or: • $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-(-1) \\ -1-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 1-2 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme $z_{\overrightarrow{AC}} = 0 \times z_{\overrightarrow{AB}}$ et $x_{\overrightarrow{AC}} \neq 0 \times x_{\overrightarrow{AB}}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car ils ne sont pas proportionnels.

Les points A, B et C ne sont donc pas alignés.

Donc les points A, B et C définissent bien un plan noté (ABC).

Étape 2: $\vec{n}$ est-il un vecteur normal au plan (ABC) ?

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) ssi ce vecteur est orthogonal aux 2 vecteurs non colinéaires de ce plan.

Or: $\begin{cases} \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0. \end{cases}$

Nous avons: • $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 2 + 2 \times (-3) + 4 \times 1 = 0$

• $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 2 + 2 \times (-1) + 4 \times 0 = 0.$

Comme $\vec{n}$ est bien orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

2. b. Déduisons-en une équation cartésienne du plan (ABC):

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point $A (x_A ; y_A ; z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}$ ($a ; b ; c$) s'écrit:

$$a (x - x_A) + b (y - y_A) + c (z - z_A) = 0.$$

Or: • un vecteur normal est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

• le point $A \in$ (ABC), avec $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a (x - x_A) + b (y - y_A) + c (z - z_A) = 0$

$\Leftrightarrow \; 1 \times (x + 1) + 2 \times (y - 2) + 4 \times (z - 1) = 0$

cad $x + 2y + 4z - 7 = 0$.

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc bien:

$$x + 2y + 4z - 7 = 0.$$

2. c. Montrons que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires:

Nous avons: $S\left(-\frac{1}{2}; 1; 4\right)$.

D'après le cours, les points A, B, C et S sont coplanaires si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AS}$ sont coplanaires.

Or ici, une équation cartésienne du plan (ABC) est: $x + 2y + 4z - 7 = 0$.

Et: $x_S + 2y_S + 4z_S - 7 = -\frac{1}{2} + 2 \times 1 + 4 \times 4 - 7 = \frac{21}{2} \neq 0$.

Donc le point S n'appartient pas au plan (ABC) et par conséquent: les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires

3. a. Montrons que " H " est le projeté orthogonal de " S " sur le plan (ABC):

Nous avons: $H(-1; 0; 2)$ et $S\left(-\frac{1}{2}; 1; 4\right)$.

Étape 1: $H \in (ABC)$?

$H \in (ABC)$ car: $x_H + 2y_H + 4z_H - 7 = -1 + 2 \times 0 + 4 \times 2 - 7 = 0$.

OUI le point H appartient au plan (ABC).

Étape 2: $\overrightarrow{SH}$ **et** $\vec{n}$ **sont-ils colinéaires ?**

Si **H** est le projeté orthogonal du point **S** sur le plan **(ABC)** alors $\overrightarrow{SH}$ est un vecteur normal à ce plan, donc colinéaire à $\vec{n}$.

Or: • $\overrightarrow{SH} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

• $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

• $\vec{n} = -2\ \overrightarrow{SH}$.

Comme les vecteurs $\overrightarrow{SH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires: **H est bien le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC).**

3. b. Montrons qu'il n'existe aucun point " M " de (ABC) tel que $SM < \frac{\sqrt{21}}{2}$:

Nous avons: $SH^2 = \frac{21}{4}$ soit $SH = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Comme **H** est le projeté orthogonal de **S** sur le plan **(ABC)**, la distance **SH** est la plus petite distance de **S** à ce plan.

Pour tout autre point **M** distinct de **H**, avec $M \in$ **(ABC)**, on aura forcément:

$$SM > \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

Donc effectivement, il n'existe aucun point M de (ABC) tel que $SM < \frac{\sqrt{21}}{2}$.

PARTIE B

1. Déterminons les coordonnées du point M en fonction de k:

Ici: $\overrightarrow{CM} = k \cdot \overrightarrow{CS}$, avec $k \in [0; 1]$.

$$\overrightarrow{CM} = k \cdot \overrightarrow{CS} \iff \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - 1 \\ 1-1 \\ 4-1 \end{pmatrix}, \text{ avec } M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x - 1 = -\frac{3}{2}k \\ y - 1 = 0 \\ z - 1 = 3k \end{cases}$$

$$\text{cad } \begin{cases} x = -\frac{3}{2}k + 1 \\ y = 1 \\ z = 3k + 1 \end{cases}.$$

Les coordonnées du point M sont donc:
- $x = -\frac{3}{2}k + 1$
- $y = 1$.
- $z = 3k + 1$

2. Déterminons le point " M " ∈ [CS] tel que MAB soit rectangle en M:

MAB est rectangle en M ssi $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.

Or: • $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}k + 1 + 1 \\ 1 - 2 \\ 3k + 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}k + 2 \\ -1 \\ 3k \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}k + 1 - 1 \\ 1 + 1 \\ 3k + 1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}k \\ 2 \\ 3k - 1 \end{pmatrix}$.

D'où: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \iff \left(-\frac{3}{2}k + 2\right) \times \left(-\frac{3}{2}k\right) + (-1 \times 2) + (3k) \times (3k - 1) = 0$

$\iff 45k^2 - 24k - 8 = 0$

$\iff (k - k_1) \times (k - k_2) = 0$

avec $k_1 \approx 0,765 \in [0;1]$ et $k_2 \approx -0,232 \notin [0;1]$.

Nous retiendrons: $k \approx 0,765$.

Par conséquent, les coordonnées du point M sont donc:

$$x = -\frac{3}{2} \times 0,765 + 1, \quad y = 1, \quad z = 3 \times 0,765 + 1.$$

Au total, le point M a pour coordonnées: $x \approx 0,1475$, $y = 1$, $z = 3,295$.