BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 1

ASIE

2025

Questionnaire à Choix Multiple

RÉPONSES F F V F V

PRÉALABLE:

- $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $A(1;1;0)$, $B(2;1;0)$ et $C(\alpha;3;\alpha)$.

- Une représentation paramétrique de (d) est $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Les points A, B et C définissent un plan et un vecteur normal à ce plan est ...

- **A, B et C définissent-ils un plan ?**

D'après le cours, les points A, B et C définissent un plan ssi **les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.**

Or: • $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-1 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 3 - 1 \\ \alpha - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnels, donc pas colinéaires.

Les points A, B et C ne sont donc pas alignés.

Ils définissent donc bien un plan noté (ABC).

• **Le vecteur $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est-il normal au plan (ABC) ?**

Le vecteur $\vec{j}$ **(0 ; 1 ; 0)** est normal au plan (ABC) ssi il est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

Or: • $\vec{j} . \overrightarrow{AB} = (0 \times 1) + (1 \times 0) + (0 \times 0) = 0$

• $\vec{j} . \overrightarrow{AC} = (0 \times (\alpha - 1)) + (1 \times 2) + (0 \times \alpha) = 2 \neq 0$.

Les vecteurs $\vec{j}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas orthogonaux, et par conséquent le vecteur $\vec{j}$ n'est pas normal au plan (ABC).

L'affirmation 1 est donc: Fausse.

2. Il existe un réel " α " tel que les droites (AC) et d sont parallèles ...

→ Un vecteur directeur de la droite (AC) est: $\overrightarrow{AC} = (\alpha - 1 ;\ 2 ; \alpha)$.

→ Un vecteur directeur de la droite d est: $\vec{u} = (1 ; 2 ; -1)$.

Les droites **(AC)** et **d** sont parallèles ssi il existe un réel β tel que:

$$\overrightarrow{AC} = \beta \times \vec{u}.$$

$$\overrightarrow{AC} = \beta \times \vec{u} \iff \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix} = \beta \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha - 1 = \beta \\ 2 = 2\beta \\ \alpha = -\beta \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha - 1 = \beta \text{ ?} \\ \beta = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

Or: $\alpha - 1 = -1 - 1 = -2 \neq \beta = 1.$

Donc le système est impossible, et par conséquent, les droites (AC) et d ne sont pas parallèles.

L'affirmation 2 est donc: Fausse.

3. Une mesure de l'angle $\widehat{OAB}$ est égale à 135° ?

• $\overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

- $\overrightarrow{AO}\,.\,\overrightarrow{AB} = ((-1) \times 1) + ((-1) \times 0) + (0 \times 0) = -1.$

- $AO = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ et $AB = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1.$

Dans ces conditions, nous avons: $\cos(\widehat{OAB}) = \dfrac{\overrightarrow{AO}\,.\,\overrightarrow{AB}}{AO\,.\,AB}$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2} \times 1}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nous obtenons ainsi: $\widehat{OAB} = 135°.$ $\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

L'affirmation 3 est donc: Vraie.

4. Le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est le point H ...

Ici le point H, projeté orthogonal de A sur (d), a pour coordonnées: $(1\,;2\,;2).$

Une représentation paramétrique de (d) est: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases}$ $(I).$

Comme le point H est le projeté orthogonal de A sur (d), il est forcément sur la droite (d), et donc ses coordonnées vérifient (I).

$$(I) \iff \begin{cases} 1 = 1 + t \\ 2 = 2t \\ 2 = -t \end{cases} \quad \text{cad} \quad \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = -2 \end{cases}.$$

Le système est donc impossible, et par conséquent: $H \notin (d)$.

H n'étant pas sur la droite (d), il ne peut pas être le projeté orthogonal du point A sur (d).

L'affirmation 4 est donc: Fausse.

5. La sphère de centre O et de rayon 1 rencontre la droite (d) en ...

L'affirmation 5 est donc: Vraie.