www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 2

AMÉRIQUE DU NORD
2025

$$a_n = \frac{U_n}{U_n - 1}$$

CORRECTION

1. Calculons U_1:

D'après l'énoncé: • $U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 1}{U_n + 2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $U_0 = 2$.

Dans ces conditions: $U_1 = \dfrac{2U_0 + 1}{U_0 + 2}$

$= \dfrac{5}{4}$.

Ainsi: $U_1 = \dfrac{5}{4}$.

2. a. Calculons a_0 et a_1:

D'après l'énoncé: $a_n = \dfrac{U_n}{U_n - 1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'où: • $a_0 = \dfrac{U_0}{U_0 - 1} = \dfrac{2}{2 - 1} = 2$

Freemaths : Tous droits réservés

$$\bullet\ a_1 = \frac{U_1}{U_1 - 1} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4} - 1} = 5.$$

Ainsi: $a_0 = 2$ et $a_1 = 5$.

2. b. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 3a_n - 1$:

Pour tout entier naturel n, nous avons:

$$\bullet\ a_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{U_{n+1} - 1}$$

$$= \frac{\frac{2U_n + 1}{U_n + 2}}{\frac{2U_n + 1}{U_n + 2} - 1}$$

$$= \frac{2U_n + 1}{2U_n + 1 - U_n - 2}$$

$$= \frac{2U_n + 1}{U_n - 1}.$$

$$\bullet\ 3a_n - 1 = 3 \times \left(\frac{U_n}{U_n - 1} \right) - 1$$

$$= \frac{3U_n - U_n + 1}{U_n - 1}$$

$$= \frac{2U_n + 1}{U_n - 1}.$$

Freemaths : Tous droits réservés

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons bien: $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

2. c. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant 3n - 1$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant 3n - 1$ ".

Initialisation: $a_1 = 5$.

Et: $3 \times 1 - 1 = 2 \leqslant 5$.

D'où: $a_1 \geqslant 3 \times 1 - 1$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant 3n - 1$ et montrons qu'alors $a_{n+1} \geqslant 3(n+1) - 1$.

Supposons: $a_n \geqslant 3n - 1$, pour un entier naturel non nul fixé.

(1)

D'où: (1) $\Rightarrow$ $3a_n \geqslant 3 \times (3n - 1)$

$\Rightarrow$ $3a_n \geqslant 9n - 3$

$\Rightarrow$ $3a_n - 1 \geqslant 9n - 3 - 1$

$\Rightarrow$ $a_{n+1} \geqslant 9n - 4$

$\Rightarrow$ $a_{n+1} \geqslant 3(n+1) - 1 + [6(n-1)]$

Freemaths : Tous droits réservés

$\Rightarrow a_{n+1} \geqslant 3(n+1) - 1$ car $[6(n-1)] \geqslant 0$.

Conclusion: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant 3n - 1$.

2. d. Déduisons-en la limite de la suite (a_n):

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} 3n - 1$$

$$= +\infty.$$

Ainsi: la suite (a_n) est divergente avec $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.

3. a. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \dfrac{a_n}{a_n - 1}$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \dfrac{U_n}{U_n - 1}$.

D'où: $U_n = a_n \times (U_n - 1) \iff U_n = a_n \times U_n - a_n$

$$\iff U_n (1 - a_n) = -a_n$$

$$\iff U_n = \frac{a_n}{a_n - 1}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons bien: $U_n = \dfrac{a_n}{a_n - 1}$.

3. b. Déduisons-en la limite de (U_n):

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{a_n - 1}$$

Freemaths : Tous droits réservés

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{a_n} \right)}$$

$$= 1 \quad \text{car} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Ainsi: la suite (U_n) est convergente avec $\lim_{n \to +\infty} U_n = 1$.

4. a. Interprétons les valeurs renvoyées:

Le programme écrit en langage Python est:

```
1    def algo (p):
2        u = 2
3        n = 0
4        while u - 1 > p:
5            u = (2 * u + 1) / (u + 2)
6            n = n + 1
7        return (n, u)
```

Les valeurs n et u renvoyées par l'appel de la fonction algo (p) correspondent respectivement à l'indice et à la valeur du premier terme de la suite pour lequel l'écart entre le terme et la limite de la suite est inférieur ou égal à la valeur p choisie.

Freemaths : Tous droits réservés

4. b. Donnons la valeur de n pour $p = 0,001$:

La valeur de n pour $p = 0,001$ est: 6.

$[U_6 - 1 \leqslant 0,001]$

Freemaths : Tous droits réservés