BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 4

FRANCE MÉTROPOLITAINE
2024

Questionnaire à Choix Multiple

RÉPONSES V F V V

1. Les points A, C et D définissent un plan $\mathcal{P}$ d'équation...

Ici: $A(2\,;0\,;0)$, $C(4\,;4\,;1)$, $D(0\,;0\,;4)$.

D'après le cours, les points A, C et D définissent un plan ssi **les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires**.

Or: • $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 4-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Comme $z_{\overrightarrow{AD}} = 4 \times z_{\overrightarrow{AC}}$ et $x_{\overrightarrow{AD}} \neq 4 \times x_{\overrightarrow{AC}}$, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires car ils ne sont pas proportionnels.

Les points A, C et D ne sont donc pas alignés.

Ils définissent donc bien un plan noté (ACD).

Mais l'équation de ce plan est-elle bien: $8x - 5y + 4z - 16 = 0$?

Notons que le plan $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal: $\vec{n}\,(8\,;-5\,;4)$.

Or: • $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 \times 2 + (-5) \times 4 + 4 \times 1 = 0$

• $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 8 \times (-2) + (-5) \times 0 + 4 \times 4 = 0$.

D'où le vecteur $\vec{n}$ est bien normal au plan (ACD) car il est orthogonal aux 2 vecteurs non colinéaires de ce plan.

De plus, le point $A\,(2\,;0\,;0)$ vérifie l'équation $8x - 5y + 4z - 16 = 0$.

En effet: $8 \times 2 - 5 \times 0 + 4 \times 0 - 16 = 0$.

Au total, les points A, C et D définissent un plan $\mathcal{P}$ d'équation:

$$8x - 5y + 4z - 16 = 0.$$

2. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?

Ici: $A\,(2\,;0\,;0)$, $B\,(0\,;4\,;3)$, $C\,(4\,;4\,;1)$, $D\,(0\,;0\,;4)$.

Les points A, B, C et D sont coplanaires si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Or les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires ssi il existe deux réels α et β tels que: $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC} + \beta \cdot \overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC} + \beta \cdot \overrightarrow{AD} \iff \begin{pmatrix} 0-2 \\ 4-0 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - 2\beta = -2 \\ 4\alpha = 4 \\ \alpha + 4\beta = 3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = -1 \\ \alpha = 1 \\ \alpha + 4\beta = 3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 1 \\ 1 + 4 \times 2 = 3 \text{ ?} \end{cases}$$ NO NO NO

Comme $1 + 4 \times 2 = 9 \neq 3$, les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires car no α et no β.

3. Les droites (AC) et (BH) sont sécantes car...

Ici: A (2 ; 0 ; 0), B (0 ; 4 ; 3), C (4 ; 4 ; 1), H (- 1 ; 1 ; 2).

Les droites (AC) et (BH) ont respectivement comme coefficients directeurs:

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Comme $x_{\overrightarrow{AC}} = -2 \times x_{\overrightarrow{BH}}$ et $y_{\overrightarrow{AC}} \neq -2 \times y_{\overrightarrow{BC}}$, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BH}$ ne sont pas colinéaires car ils ne sont pas proportionnels.

Donc les droites (AC) et (BH) sont bien sécantes.

Elles s'intersectent même au point (- 8 ; - 20 ; - 5).

4. H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC)...

Étape 1: Détermination d'une représentation paramétrique de (d)

Une équation cartésienne du plan (ABC) est: $x - y + 2z - 2 = 0$.
($\vec{n}$ (1 ; - 1 ; 2))

De plus, la droite (d) est orthogonale au plan (ABC) et passe par le point D $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (d) est donc: $\vec{u} = \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions, une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}$ (1 ; - 1 ; 2) s'écrit:

$$\begin{cases} x = 0 + 1 \times t \\ y = 0 + (-1) \times t \\ z = 4 + 2 \times t \end{cases} \quad \text{cad} \quad \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 4 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Étape 2: Détermination des coordonnées du point H

Le point H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

Le point H est donc le point d'intersection entre (d) et le plan (ABC).

Les coordonnées du point H vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_H = t & (1) \\ y_H = -t & (2) \\ z_H = 4 + 2t & (3) \\ x_H - y_H + 2z_H - 2 = 0 & (4) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$(4) \iff x_H - y_H + 2z_H - 2 = 0 \iff t - (-t) + 2 \times (4 + 2t) = 2$

$\iff 6t = -6$

cad $t = -1$.

Les coordonnées du projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC) sont donc:

- $x_H = t = -1$
- $y_H = -t = 1$.
- $z_H = 4 + 2t = 2$

Et, elles correspondent bien aux coordonnées du point H de l'énoncé.