# BACCALAURÉAT
# MATHÉMATIQUES

## SUJET 2

## CORRIGÉ EXERCICE 2

2023

# $\mathcal{P}_1$ & $\mathcal{P}_2$

## CORRECTION

**1. Justifions que les plans $P_1$ et $P_2$ ne sont pas parallèles:**

Ici: • $P_1$ a pour équation: $5x + 2y + 4z = 17$ **(1)**

• $P_2$ a pour équation: $10x + 14y + 32z = 19$ **(2)**.

Soient $P_1$ et $P_2$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$.

**Les plans $P_1$ et $P_2$ sont parallèles ssi: $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont colinéaires.**

Le vecteur normal de $P_1$ est: $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. **( coefficients de $x, y$ et $z$ dans (1) )**

Le vecteur normal de $P_2$ est: $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}$. **( coefficients de $x, y$ et $z$ dans (2) )**

Et: $x_{\vec{n_1}} = \frac{1}{2} \times x_{\vec{n_2}}$ **et** $y_{\vec{n_1}} \neq \frac{1}{2} \times y_{\vec{n_2}}$.

Les vecteurs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont donc pas proportionnels **et, par conséquent, ils ne sont pas colinéaires.**

$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ n'étant pas colinéaires: les plans $P_1$ et $P_2$ ne sont pas parallèles.

2. Montrons que D est la droite d'intersection de $P_1$ et $P_2$:

Une représentation paramétrique de la droite D est: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ , $t \in \mathbb{R}$.

La droite D est l'intersection des plans $P_1$ et $P_2$ ssi:

$$\begin{cases} 5x + 2y + 4z = 17 & (1) \\ 10x + 14y + 3z = 19 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 2y + 4z = 17 \\ 10x + 14y + 3z = 19 \end{cases} \iff \begin{cases} -10y + 5z = 15 & 2 \times (1) - (2) \\ 10x + 14y + 3z = 19 & (2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = \frac{1}{5} \times (15 + 10y) \\ x = \frac{1}{10} \times (19 - 14y - 3z) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{10} \times (19 - 14y - 3 \times (3 + 2y)) \\ y = t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y \\ y = t \\ z = 3 + 2y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Nous retrouvons ainsi la représentation paramétrique de la droite D de l'énoncé, et donc: la droite D est bien l'intersection des plans $P_1$ et $P_2$.

3. a. Vérifions que A n'appartient pas à $P_1$:

Le point A a pour coordonnées: $( 1 ; -1 ; -1 )$.

Le point $A \in P_1$ ssi ses coordonnées vérifient l'équation: $5x + 2y + 4z = 17$.

Or: $5 \times 1 + 2 \times (-1) + 4 \times (-1) = -1 \neq 17$.

Donc le point A n'appartient pas à $P_1$: $A \notin P_1$.

3. b. Justifions que A n'appartient pas à D:

Le point A a pour coordonnées: $( 1 ; -1 ; -1 )$.

Le point $A \in D$ ssi il existe un réel unique " $t$ " tel que: $\begin{cases} x_A = 1 + 2t \\ y_A = -t \\ z_A = 3 - 2t \end{cases}$.

$$\begin{cases} x_A = 1 + 2t \\ y_A = -t \\ z_A = 3 - 2t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 + 2t \\ -1 = -t \\ -1 = 3 - 2t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases}.$$

Comme $t$ prend 3 valeurs différentes, nous pouvons affirmer que: $A \notin D$.

4. a. Montrons que pour tout réel $t$, $f(t) = 9t^2 - 18t + 17$:

D'après l'énoncé: • $A(1; -1; -1)$

• $M(1 + 2t; -t; 3 - 2t) \in D$.

Dans ces conditions: $AM^2 = ((1 + 2t) - 1)^2 + (-t - (-1))^2 + (3 - 2t - (-1))^2$

$= (2t)^2 + (-t + 1)^2 + (4 - 2t)^2$

$= 9t^2 - 18t + 17$.

Comme $f(t) = AM^2$, nous avons bien: $f(t) = 9t^2 - 18t + 17$.

4. b. Montrons que la distance AM est minimale quand $M(3; -1; 1)$:

La distance AM est minimale quand " $9t^2 - 18t + 17$ " est minimum.

Or: $f(t) = 9t^2 - 18t + 17$, pour tout $t \in IR$.

$f$ est dérivable sur IR comme fonction polynôme et nous pouvons ainsi calculer sa dérivée $f'$ pour tout $t \in IR$: $f'(t) = 18t - 18$.

$f'(t) = 0$ quand $18t - 18 = 0$ cad quand $t = 1$.

Donc AM est minimum quand $t = 1$.

Les coordonnées du point M sont donc: $x_M = 3$, $y_M = -1$ et $z_M = 1$.

5. Montrons que la droite (AH) est perpendiculaire à D:

Notons que les coordonnées du point H sont: $(3; -1; 1)$.

Un vecteur directeur de la droite **(AH)** est le vecteur:

$$\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} x_H - x_A \\ y_H - y_A \\ z_H - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Via la représentation paramétrique de la droite D, un vecteur directeur de D est: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux car: $\overrightarrow{AH} . \vec{u} = 0$.

En effet: $\overrightarrow{AH} . \vec{u} = (2 \times 2) + (0 \times (-1)) + (2 \times (-2)) = 0$.

**Les droites (AH) et D sont donc orthogonales.**

**Comme H ∈ D et H ∈ (AH), D et (AH) sont sécantes au point H: elles sont donc perpendiculaires.**