BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 4

POLYNÉSIE

2023

$g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x$

CORRECTION

1. a. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2 \times 0,9^n - 3$:

Ici: • $U_{n+1} = 0,9\,U_n - 0,3$

• $U_0 = -1$

• $n \in \mathbb{N}$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier n: $U_n = 2 \times 0,9^n - 3$ ".

Initialisation: $U_0 = 2 \times (0,9)^0 - 3$?

$$\begin{cases} U_0 = -1, \text{ d'après l'énoncé} \\ \text{et} \\ 2 \times (0,9)^0 - 3 = 2 \times 1 - 3 = -1. \end{cases}$$

Comme $-1 = -1$, **vrai au rang " 0 "**.

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $U_n = 2 \times (0,9)^n - 3$ et montrons qu'alors $U_{n+1} = 2 \times (0,9)^{(n+1)} - 3$.

Supposons: $U_n = 2 \times (0,9)^n - 3$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

$(1) \Rightarrow 0,9 \times U_n = 0,9 \times (2 \times (0,9)^n - 3)$

$\Rightarrow 0,9 \times U_n = 2 \times (0,9)^{(n+1)} - 2,7$

$\Rightarrow 0,9 \times U_n - 0,3 = 2 \times (0,9)^{(n+1)} - 2,7 - 0,3$

$\Rightarrow U_{n+1} = 2 \times (0,9)^{(n+1)} - 3.$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $U_n = 2 \times (0,9)^n - 3$.

1. b. Déduisons-en que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-3 < U_n \leqslant -1$:

Ici $n \in \mathbb{N}$, d'où: $0 \leqslant n < x$, avec x tend vers $+\infty$.

Et: • $\lim\limits_{n \to 0^+} 2 \times (0,9)^n - 3 = -1$, car $(0,9)^0 = 1$

• $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 \times (0,9)^n - 3 = -3$, car $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,9)^n = 0$.

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons bien: $-3 < U_n \leqslant -1$.

1. c. Montrons que la suite (U_n) est strictement décroissante:

La suite (U_n) est strictement décroissante ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} - U_n < 0$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} - U_n = 0,9\,U_n - 0,3 - U_n$

$= -0,1\,U_n - 0,3.$

Et, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $-3 < U_n \leqslant -1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $-3 < U_n \leqslant -1 \iff -3 \times 0,1 < 0,1 \times U_n \leqslant -1 \times 0,1$

$\iff -0,3 < 0,1 \times U_n \leqslant -0,1$

$\iff 0,1 \leqslant -0,1 \times U_n < 0,3$

$\iff 0,1 - 0,3 \leqslant -0,1 \times U_n - 0,3 < 0,3 - 0,3$

cad : $-0,2 \leqslant U_{n+1} - U_n < 0$.

Ainsi, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} - U_n < 0$: la suite (U_n) est bien strictement décroissante.

1. d. Montrons que la suite converge et précisons sa limite :

D'après le cours, nous savons que toute suite strictement décroissante et minorée est convergente.

Ici la suite (U_n) est strictement décroissante ($U_{n+1} - U_n < 0$) et est strictement minorée par $m = -3$ ($-3 < U_n \leqslant -1$) : elle est donc convergente et converge vers une limite " ℓ ".

" ℓ " est telle que : $\ell = 0,9 \times \ell - 0,3$ cad $\ell = -3$.

2. a. Justifions toutes les informations du tableau de variations :

Ici : • $g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x$ $(\ln(U) + V)$

• $\mathcal{D}g =]-3 ; -1]$

Nous avons le tableau de variations suivant :

x	-3		-2		-1
g'	$\|$	$+$	0	$-$	
g	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$g(-2)$	$\searrow$	1

Avec: • $\lim\limits_{x \to -3} g(x) = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = 1.$

JUSTIFICATIONS:

• La fonction g n'est pas définie en " -3 ", d'où: $\|$

• La fonction $g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x$ est dérivable sur $]-3; -1]$.

Ainsi, nous pouvons calculer g' pour tout $x \in]-3; -1]$.

Pour tout $x \in]-3; -1]$: $g'(x) = \dfrac{0,5}{0,5x + 1,5} - 1$ $\quad \left(\dfrac{u'}{u} + v'\right)$

$$= \frac{-(0,5x + 1)}{0,5x + 1,5}.$$

Distinguons deux cas pour tout $x \in]-3; -1]$, **sachant que $0,5x + 1,5 > 0$**:

• $g'(x) \leqslant 0$ ssi $0,5x + 1 \geqslant 0$ cad $x \geqslant -2$ ou $[-2; -1]$

• $g'(x) \geqslant 0$ ssi $0,5x + 1 \leqslant 0$ cad $x \leqslant -2$ ou $]-3; -2]$.

Dans ces conditions: • la fonction g est croissante sur $]-3;-2]$,

• la fonction g est décroissante sur $[-2;-1]$.

• $\lim\limits_{x \to -3} g(x) = \lim\limits_{x \to -3} \ln(0,5x + 1,5) - x$

$= \lim\limits_{X \to 0^+} \ln(X) - [2X - 3]$, **avec**: $X = 0,5x + 1,5$.

Or d'après le cours: • $\lim\limits_{X \to 0^+} \ln(X) = -\infty$

• $\lim\limits_{X \to 0^+} X = 0$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to -3} g(x) = (-\infty) - [2 \times 0 - 3] = -\infty$.

• $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = \lim\limits_{x \to -1} \ln(0,5x + 1,5) - x$.

Or d'après le cours: • $\lim\limits_{x \to -1} \ln(0,5x + 1,5) = \ln(1) = 0$

• $\lim\limits_{x \to -1} x = -1$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = 0 - (-1) = 1$.

• Enfin: $g(-2) = \ln(0,5) + 2 = -\ln(2) + 2$.

2. b. b1. Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-3;-2]$:

D'après le corollaire du TVI: Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a; b]$ ou $I =]a; b[$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici: • g est continue sur $]-3; -1]$, donc sur $]-3; -2]$,

• " k = 0 " est compris entre: $\lim\limits_{x \to -3} g(x) = -\infty < 0$

et: $g(-2) = \ln(0,5) + 2 > 0$,

• g est strictement croissante sur $]-3; -2]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution α appartenant à $]-3; -2]$.

2. b. b2. Donnons un encadrement à 10^{-3} près de α:

A l'aide d'une calculatrice, nous trouvons comme encadrement à 10^{-3} près pour α: $-2,889 < \alpha < -2,888$.

3. a. Montrons que la suite (V_n) est arithmétique de raison " $\ln(0,9)$ ":

Nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: • $U_n = 2 \times (0,9)^n - 3$

• $V_n = \ln(0,5\ U_n + 1,5)$.

Dans ces conditions, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_n = \ln(0,5 \times [2 \times (0,9)^n - 3] + 1,5)$

$= \ln((0,9)^n)$

$= n \times \ln(0,9)$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: (V_n) est une suite arithmétique de raison " $\ln(0,9)$ "

et de premier terme " $V_0 = 0$ ".

3. b. Montrons que $U_n = V_n$ ssi $g(U_n) = 0$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = V_n \iff U_n = \ln(0,5\,U_n + 1,5)$

$\iff \ln(0,5\,U_n + 1,5) - U_n = 0$

cad: $g(U_n) = 0$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = V_n$ ssi $g(U_n) = 0$.

3. c. Démontrons qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$, pour lequel $U_k = \alpha$:

Nous savons que: • $g(U_n) = 0$

• $g(\alpha) = 0$.

Dans ces conditions, par identification:

$U_n = \alpha \iff 2 \times (0,9)^n - 3 = \alpha$

$\iff (0,9)^n = \dfrac{\alpha + 3}{2}$

$\iff n \ln(0,9) = \ln(0,5\alpha + 1,5)$

cad: $n = \dfrac{\ln(0,5\alpha + 1,5)}{\ln(0,9)}$.

Or: $-2,889 < \alpha < -2,888$, d'après 2. b. b2.

D'où: $0,5 \times (-2,889) < 0,5 \times \alpha < 0,5 \times (-2,888)$

$\iff 0,5 \times (-2,889) + 1,5 < 0,5 \times \alpha + 1,5 < 0,5 \times (-2,888) + 1,5$

$$\Longleftrightarrow \frac{\ln(0,0555)}{\ln(0,9)} > \frac{\ln(0,5 \times \alpha + 1,5)}{\ln(0,9)} > \frac{\ln(0,056)}{\ln(0,9)}$$

(On change le sens des inégalités car $\ln(0,9) < 0$)

cad: $27,442 > n > 27,357$.

Au total: $27,357 < n < 27,442$ et par conséquent il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ tel que $U_k = \alpha$.

3. d. Déduisons-en qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $V_k = U_k$:

Nous savons que: $U_n = \alpha \Longleftrightarrow g(U_n) = 0 \Longleftrightarrow U_n = V_n$.

Or, d'après la question précédente: il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ tel que l'égalité $U_k = \alpha$ soit vérifiée.

Donc: il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ tel que $V_k = U_k$.