BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 2

2023

LA DROITE Δ

CORRECTION

1. a. Déterminons un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite (d_2):

Une représentation paramétrique de la droite (d_2) est:

$$\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = t \\ z = 5 \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

Dans ces conditions, nous pouvons affirmer que: **la droite (d_2) passe par le point de coordonnées $(-3 ; 0 ; 5)$ et a pour vecteur directeur le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.**

D'où un vecteur directeur de la droite (d_2) est: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. b. Montrons que les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles:

Les vecteurs directeurs des droites (d_1) et (d_2) sont respectivement:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or: $x_{\vec{u}} = \frac{1}{2} \times x_{\vec{v}}$ **et** $y_{\vec{u}} \neq \frac{1}{2} \times y_{\vec{v}}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas proportionnels **et, par conséquent, ils ne sont pas colinéaires.**

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'étant pas colinéaires: **les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.**

1. c. Montrons que les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas sécantes:

- Une représentation paramétrique de la droite (d_1) passant par le point

H (2 ; 3 ; 0) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est: $\begin{cases} x = 2 + 1 \times t' \\ y = 3 + (-1) \times t' \\ z = 0 + 1 \times t' \end{cases}$, $t' \in IR$.

- Une représentation paramétrique de la droite (d_2) est:

$$\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = t \\ z = 5 \end{cases}, t \in IR.$$

Le point d'intersection entre les droites (d_1) et (d_2) vérifie donc le système:

$$\begin{cases} 2 + t' = 2t - 3 \\ 3 - t' = t \\ t' = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 + t' = 2t - 3 \\ 3 - 5 = t \\ t' = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 7 = -7 \quad \text{impossible !} \\ t = -2 \\ t' = 5 \end{cases}$$

Donc aucun point d'intersection entre les droites (d_1) et (d_2): ces dernières ne sont donc pas sécantes.

1. d. La position relative des droites (d_1) et (d_2) ?

Les droites (d_1) et (d_2) n'étant ni sécantes ni parallèles: elles ne sont pas coplanaires.

2. a. Vérifions que le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$:

Le vecteur $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ ssi: $\begin{cases}\vec{w}.\vec{u}=0\\ \vec{w}.\vec{v}=0\end{cases}$.

Or: • $\vec{w}.\vec{u}=(-1\times 1)+(2\times(-1))+(3\times 1)=0$

• $\vec{w}.\vec{v}=(-1\times 2)+(2\times 1)+(3\times 0)=0$.

Comme $\vec{w}.\vec{u}=0$ et $\vec{w}.\vec{v}=0$: $\vec{w}$ est bien orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

2. b. Montrons que l'intersection du plan P et de la droite (d_2) est le point M de coordonnées $(3;3;5)$:

• Une représentation paramétrique de la droite (d_2) est: $\begin{cases}x=2t-3\\ y=t\\ z=5\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

• Une équation cartésienne du plan P est: $5x+4y-z-22=0$.

Le point d'intersection M entre le plan et la droite (d_2) vérifie donc le système:

$$\begin{cases} x_M = 2t - 3 & (1) \\ y_M = t & (2) \\ z_M = 5 & (3) \\ 5x_M + 4y_M - z_M - 22 = 0 & (4) \end{cases}$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$$(4) \iff 5x_M + 4y_M - z_M - 22 = 0 \iff 5 \times (2t - 3) + 4 \times (t) - 5 - 22 = 0$$

$$\iff 10t - 15 + 4t - 27 = 0$$

$$\iff 14 \times t - 42 = 0$$

cad $t = 3$.

Les coordonnées du point M sont donc:

- $x_M = 2 \times 3 - 3 = 3$
- $y_M = 3 = 3$.
- $z_M = 5 = 5$

3. a. a$_1$. Justifions que les droites Δ et (d_1) sont perpendiculaires:

Les droites Δ et (d_1) ont pour vecteurs directeurs respectifs: $\vec{w}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les droites Δ et (d_1) sont perpendiculaires ssi: $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$.

Or: $\vec{w} \cdot \vec{u} = (-1 \times 1) + (2 \times (-1)) + (3 \times 1) = 0$.

Donc les vecteurs directeurs $\vec{w}$ et $\vec{u}$ et sont orthogonaux.

Par conséquent: les droites Δ et (d_1) sont bien perpendiculaires.

3. a. a_2. Déterminons les coordonnées du point L:

Le point L est le point d'intersection entre les droites Δ et (d_1).

L vérifie donc le système: $\begin{cases} -r+3=2+t' \\ 2r+3=3-t' \\ 3r+5=t' \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -r+3=2+t' \\ 2r+3=3-(3r+5) \\ t'=3r+5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -r+3=3r+7 \\ 5r=-5 \\ t'=3r+5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4=4 \\ r=-1 \\ t'=2 \end{cases}.$$

Les coordonnées du point L sont donc:
- $x_L = 2+2 = 4$
- $y_L = 3-2 = 1$

• $z_L = 2 = 2$.

3. b. Expliquons pourquoi la droite Δ est solution du problème posé :

OUI car Δ est bien perpendiculaire aux droites (d_1) et (d_2) !