BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 3

NOUVELLE CALÉDONIE
2023

$$U_{n+1} = \frac{-U_n - 4}{U_n + 3}$$

CORRECTION

1. Calculons U_1 et U_2 :

Ici : • $U_{n+1} = \dfrac{-U_n - 4}{U_n + 3}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $U_0 = 0$.

Dans ces conditions : • $U_1 = \dfrac{-U_0 - 4}{U_0 + 3} = -\dfrac{4}{3}$

• $U_2 = \dfrac{-U_1 - 4}{U_1 + 3} = \dfrac{-\left(\frac{-4}{3}\right) - 4}{\left(\frac{-4}{3}\right) + 3} = -\dfrac{8}{5}$.

Ainsi : $U_1 = -\dfrac{4}{3}$ et $U_2 = -\dfrac{8}{5}$.

2. Recopions et complétons le cadre :

La fonction *terme* écrite en langage Python de sorte que, pour tout entier naturel n, l'instruction *terme* (n) renvoie la valeur de U_n est la suivante :

Freemaths : Tous droits réservés

```
def terme (n) :
    u = 0
    for i in range(n):
       u = (-u - 4) / (u + 3)
    return(u)
```

3. Montrons que la fonction f est strictement croissante sur $]-3; +\infty[$:

Ici: • $f(x) = \dfrac{-x-4}{x+3}$ $\left(\dfrac{U}{V}\right)$

• $\mathcal{D}f =]-3; +\infty[$.

La fonction $f(x) = \dfrac{-x-4}{x+3}$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-3\}$ et donc sur $]-3; +\infty[$, avec $x + 3 \neq 0$ pour tout $x \in]-3; +\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]-3; +\infty[$.

Pour tout $x \in]-3; +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{(-1) \times (x+3) - (-x-4) \times (1)}{(x+3)^2}$

$$\left(\frac{U' \times V - U \times V'}{V^2}\right)$$

$$= \frac{1}{(x+3)^2} > 0.$$

Ainsi sur $]-3; +\infty[$, $f'(x) > 0$: f est donc strictement croissante sur $]-3; +\infty[$.

4. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-2 < U_{n+1} \leqslant U_n$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $-2 < U_{n+1} \leqslant U_n$ ".

Freemaths : Tous droits réservés

Initialisation: $U_0 = 0$ d'après l'énoncé.

Et: $U_1 = -\dfrac{4}{3}$ d'après 1.

Ainsi, nous avons bien: $-2 < U_{n+1} \leqslant U_n$ car $-2 < -\dfrac{4}{3} \leqslant 0$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $-2 < U_{n+1} \leqslant U_n$ et montrons qu'alors $-2 < U_{n+2} \leqslant U_{n+1}$.

Supposons: $-2 < U_{n+1} \leqslant U_n$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

D'où: (1) $\Rightarrow f(-2) < f(U_{n+1}) \leqslant f(U_n)$ (f est strictement croissante)

$\Rightarrow -\dfrac{2}{1} < U_{n+2} \leqslant U_{n+1}$

$\Rightarrow -2 < U_{n+2} \leqslant U_{n+1}$.

Conclusion: **Pour tout entier naturel n, $-2 < U_{n+1} \leqslant U_n$.**

5. Déduisons-en que la suite (U_n) est convergente:

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n:

$$-2 < U_{n+1} \leqslant U_n \iff \begin{cases} U_{n+1} \leqslant U_n \\ -2 \leqslant U_n \end{cases} \iff \begin{cases} (U_n) \text{ est décroissante} \\ (U_n) \text{ est minorée par } m = -2 \end{cases}.$$

Freemaths : Tous droits réservés

Or d'après le cours, toute suite décroissante et minorée est **convergente**.

Donc ici: **la suite (U_n) est convergente et converge vers " ℓ ".**

6. a. Donnons V_0:

Ici: • $V_n = \frac{1}{U_n + 2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $U_0 = 0$.

Dans ces conditions: $V_0 = \frac{1}{U_0 + 2} = \frac{1}{2}$.

6. b. Montrons que (V_n) est une suite arithmétique de raison 1:

$$V_n = \frac{1}{U_n + 2} \iff V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1} + 2}$$

$$\iff V_{n+1} = \frac{1}{\frac{-U_n - 4}{U_n + 3} + 2}$$

$$\iff V_{n+1} = \frac{1}{\frac{-U_n - 4 + 2U_n + 6}{U_n + 3}}$$

$$\iff V_{n+1} = \frac{U_n + 3}{U_n + 2}.$$

Dans ces conditions pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + 3}{U_n + 2} - \frac{1}{U_n + 2}$

$$= \frac{U_n + 3 - 1}{U_n + 2}$$

Freemaths : Tous droits réservés

$$= \frac{U_n + 2}{U_n + 2}$$

$$= 1.$$

D'où $V_{n+1} = V_n + 1$: (V_n) est donc une suite arithmétique de raison $r = 1$

et de premier terme $V_0 = \frac{1}{2}$.

6. c. Déduisons-en que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{1}{n + 0,5} - 2$:

Comme la suite (V_n) est arithmétique de raison $r = 1$, nous pouvons écrire:

$$V_n = V_0 + n \times r \quad \text{cad} \quad V_n = \frac{1}{2} + n.$$

Dans ces conditions: $V_n = \frac{1}{U_n + 2} \iff U_n + 2 = \frac{1}{V_n}$

$$\iff U_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + n} - 2$$

$$\text{cad} \quad U_n = \frac{1}{n + 0,5} - 2.$$

Pour tout entier naturel n, nous avons donc bien: $U_n = \frac{1}{n + 0,5} - 2.$

6. d. Déterminons la limite de la suite (U_n):

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n + 0,5} - 2$$

Freemaths : Tous droits réservés

$$= -2 \text{ car } \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n + 0,5} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Au total: $\lim_{n \to +\infty} U_n = -2.$

Freemaths : Tous droits réservés