www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 1

2023

LE TRIANGLE CFK

CORRECTION

1. Justifions que les points C, F et K définissent un plan:

Dans le repère orthonormé (A; $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$), les coordonnées des points C, F et K sont:

- $C\,(1;1;0)$ car $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$

$$= 1 \times \overrightarrow{AD} + 1 \times \overrightarrow{AB} + 0 \times \overrightarrow{AE}$$

- $F\,(0;1;1)$ car $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$

$$= 0 \times \overrightarrow{AD} + 1 \times \overrightarrow{AB} + 1 \times \overrightarrow{AE}$$

- $K\left(1;\frac{1}{2};1\right)$ car $\overrightarrow{AK} = 1 \times \overrightarrow{AD} + 1 \times \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AB}$.

Dans ces conditions, les vecteurs $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CK}$ ont pour coordonnées:

$$\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} x_F - x_C \\ y_F - y_C \\ z_F - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CK} = \begin{pmatrix} x_K - x_C \\ y_K - y_C \\ z_K - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notons que: $z_{\overrightarrow{CF}} = 1 \times z_{\overrightarrow{CK}}$ et $y_{\overrightarrow{CF}} \neq 1 \times y_{\overrightarrow{CK}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CK}$ ne sont donc pas proportionnels **et, par conséquent, ils ne sont pas colinéaires.**

Les points C, F et K ne sont donc pas alignés.

N'étant pas alignés: les points C, F et K définissent un plan (CFK).

2. a. Donnons les longueurs KG, GF et GC:

Comme nous sommes en présence d'un cube d'arête 1:

- $KG = \frac{1}{2}$
- $GF = 1$
- $GC = 1$.

2. b. Calculons l'aire du triangle FGC:

L'aire du triangle FGC est égale: $\mathcal{A} = \frac{GF \times GC}{2}$.

Dans ces conditions: $\mathcal{A} = \frac{1}{2}$ (en unités d'aire).

2. c. Calculons le volume du tétraèdre FGCK:

Le tétraèdre FGCK a pour **hauteur [KG]** et pour **base le triangle FGC.**

Le volume du tétraèdre FGCK est donc:

$$\frac{(\text{ Aire base triangle FGC }) \times (\text{ Hauteur tétraèdre FGCK })}{3}$$

$$= \frac{(\text{ Aire base triangle } FGC) \times KG}{3}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{3}$$

$$= \frac{1}{12}.$$

Le volume du tétraèdre FGCK est donc égal à : $\frac{1}{12}$.

3. a. Montrons que $\vec{n}$ (1 ; 2 ; 1) est normal au plan (CFK):

Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (CFK) ssi ce vecteur est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CK}$ de ce plan.

Or: $\begin{cases} \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{CF} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{CF} = 0 \\ \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{CK} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{CK} = 0. \end{cases}$

Nous avons:
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{CF} = (1 \times (-1)) + (2 \times 0) + (1 \times 1) = 0$
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{CK} = (1 \times 0) + \left(2 \times -\frac{1}{2}\right) + (1 \times 1) = 0.$

Comme $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CF}$ et à $\overrightarrow{CK}$: le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (CFK).

3. b. Déduisons qu'une équation du plan (CFK) est $x + 2y + z - 3 = 0$:

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}$ (a ; b ; c) s'écrit:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Or ici: • un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

• le point F ∈ (CFK), avec $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, nous pouvons s'écrire: $a(x - x_F) + b(y - y_F) + c(z - z_F) = 0$

$\iff 1 \times (x - 0) + 2 \times (y - 1) + 1 \times (z - 1) = 0$

cad $x + 2y + z - 3 = 0$.

Une équation cartésienne du plan (CFK) est donc bien: $x + 2y + z - 3 = 0$.

4. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (Δ):

(Δ) est la droite qui passe par le point **G** et qui est orthogonale au plan **(CFK)**.

D'après le cours, nous savons que:

• Soit $A(x_A ; y_A ; z_A)$ un point de l'espace.

• Soit $\vec{u}\,(a ; b ; c)$ un vecteur non nul de l'espace.

• La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Ici: • la droite (Δ) passe par le point **G (1; 1; 1)**

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (Δ) est: $\vec{u} = \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'où une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point G et de vecteur directeur $\vec{n}$ $(1 ; 2 ; 1)$ s'écrit:

$$\begin{cases} x = 1 + 1 \times t \\ y = 1 + 2 \times t \\ z = 1 + 1 \times t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Une représentation paramétrique de la droite (Δ) est donc:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

5. a. **Déterminons les coordonnées du point L:**

L est le point d'intersection entre la droite (Δ) est le plan (CFK).

Les coordonnées du point L vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_L = 1 + t & (1) \\ y_L = 1 + 2t & (2) \\ z_L = 1 + t & (3) \\ x_L + 2y_L + z_L - 3 = 0 & (4) \end{cases}$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$$(4) \iff x_L + 2y_L + z_L - 3 = 0 \iff (1+t) + 2\times(1+2t) + (1+t) - 3 = 0$$

$$\iff 6t = -1$$

cad $t = -\frac{1}{6}$.

Les coordonnées du point L sont donc:

- $x_L = 1 + \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}$
- $y_L = 1 + 2\times\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{4}{6}$.
- $z_L = 1 + \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}$

5. b. Déduisons-en que $LG = \frac{\sqrt{6}}{6}$:

Nous avons: $LG = \sqrt{(x_G - x_L)^2 + (y_G - y_L)^2 + (z_G - z_L)^2}$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{5}{6}\right)^2 + \left(1 - \frac{4}{6}\right)^2 + \left(1 - \frac{5}{6}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Ainsi: $LG = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

6. Déterminons la valeur exacte de l'aire du triangle CFK:

L'aire du triangle CFK en unité d'aire est: $\frac{\sqrt{6}}{4}$.