www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 4

NOUVELLE CALÉDONIE

2023

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x)$$

CORRECTION

1. a. Montrons que la limite de f en 0^+ est égale à " 0 ":

Ici: • $f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x)$ ($U - V \ln(W)$)

• $\mathcal{D}f =]\,0\,;+\infty\,[$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x).$$

Or d'après le cours : • $\lim\limits_{x\to 0^+} 5x^2 + 2x = 0$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln(x) = 0.$ (Croissances Comparées)

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 - 2 \times 0 = 0.$

1. b. Déterminons la limite de f en $+\infty$:

En $+\infty$, la fonction f peut s'écrire: $f(x) = x^2 \times \left[5 + \dfrac{2}{x} - 2\ln(x)\right]$. ($x \neq 0$)

D'où: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 \times \left[5 + \dfrac{2}{x} - 2\ln(x)\right].$

Or d'après le cours: • $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

• $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$

• $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty.$

Dans ces conditions: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty) \times [5 + 0 - 2 \times (+\infty)]$

$= (+\infty) \times (-\infty)$

$= -\infty.$

2. Calculons f' pour tout $x \in]0; +\infty[$:

La fonction $f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x)$ est deux fois dérivable sur $]0; -\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]0; +\infty[$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = 10x + 2 - \left[4x \times \ln(x) + 2x^2 \times \frac{1}{x}\right]$

$\left(U' - \left[V' \times \ln(W) + V \times \frac{W'}{W}\right]\right)$

$= 10x + 2 - 4x \ln(x) - 2x$

$= 8x + 2 - 4x \ln(x).$

Donc pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = 8x + 2 - 4x \ln(x).$

3. a. Montrons que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f''(x) = 4(1 - \ln(x))$:

Ici: • $f'(x) = 8x + 2 - 4x \ln(x)$ $(U - V \times \ln(W))$

• $\mathcal{D}f' =]0; +\infty[.$

Comme f est deux fois dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$, nous pouvons calculer f''.

Pour tout $x \in\,]\,0\,;+\infty\,[$: $f''(x) = 8 - \left[\,4 \times \ln(x) + 4x \times \dfrac{1}{x}\,\right]$

$$\left(U' - \left[\,V' \times \ln(W) + V \times \frac{W'}{W}\,\right]\right)$$

$$= 4 - 4\ln(x)$$

$$= 4\,(1 - \ln(x)).$$

Ainsi pour tout $x \in\,]\,0\,;+\infty\,[$, nous avons bien : $f''(x) = 4\,(1 - \ln(x))$.

3. b. Déduisons-en l'intervalle sur lequel $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes :

D'après le cours : sur un intervalle I, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes ssi f est convexe sur I.

Or f est convexe sur I ssi : $f''(x) \geq 0$, pour tout $x \in I$.

$f''(x) \geq 0 \iff 4\,(1 - \ln(x)) \geq 0 \iff \ln(x) \leq 1$ cad $x \leq e^1$.

Ainsi l'intervalle demandé est : $]\,0\,;e\,]$.

3. c. Dressons le tableau des variations de f' sur $]\,0\,;+\infty\,[$:

Le tableau de variations de f' sur $]\,0\,;+\infty\,[$ est :

x	0		e		$+\infty$
f''	‖	$+$	0	$-$	
f'	‖ a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 2$

• $b = f'(e) = 4e + 2$ (maximum de f' sur $]0 ; +\infty[$)

• $c = \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = -\infty$.

4. a. a1. Montrons que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$:

Préalablement notons que: cette solution unique appartient à $]e ; +\infty[$.

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a ; b]$ ou $I =]a ; b[$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici: • f' est continue sur $]0 ; +\infty[$, donc sur $]e ; +\infty[$,

• " $k = 0$ " est compris entre: $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = -\infty < 0$

et: $f'(e) = 4e + 2 > 0$,

• f est strictement décroissante sur $]\,e\,;+\infty\,[$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f'(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution α appartenant à $]\,e\,;+\infty\,[$.

4. a. a2. Donnons un encadrement à 10^{-2} près de α:

A l'aide d'une calculatrice, nous trouvons comme encadrement à 10^{-2} près pour α: $7,87 < \alpha < 7,88$.

4. b. b1. Déduisons-en le signe de f' sur $]\,0\,;+\infty\,[$:

Des questions précédentes, nous pouvons déduire le signe de la fonction f' via le tableau suivant:

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

4. b. b2. Dressons le tableau de variations de f sur $]\,0\,;+\infty\,[$:

Le tableau de variations de la fonction f sur $]\,0\,;+\infty\,[$ est alors:

x	0		α		$+\infty$
f'	||	$+$	0	$-$	
f	|| a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = 0$

• $b = f(\alpha) = 5\alpha^2 + 2\alpha - 2\alpha^2 \ln(\alpha)$ (maximum de f sur $]0;+\infty[$)

• $c = -\infty$.

5. a. Montrons que $f'(\alpha) = 0 \iff \ln(\alpha) = \dfrac{4\alpha + 1}{2\alpha}$:

Nous savons que pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = 8x + 2 - 4x \ln(x)$.

Dans ces conditions: $f'(\alpha) = 0 \iff 8\alpha + 2 - 4\alpha \ln(\alpha) = 0$

$\iff 4\alpha \ln(\alpha) = 8\alpha + 2$

cad $\ln(\alpha) = \dfrac{8\alpha + 2}{4\alpha}$ ou $\ln(\alpha) = \dfrac{4\alpha + 1}{2\alpha}$.

Ainsi nous avons bien: $\ln(\alpha) = \dfrac{4\alpha + 1}{2\alpha}$.

5. b. b1. Déduisons-en que $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$:

Nous savons que: • $f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x)$

• $\ln(\alpha) = \dfrac{4\alpha + 1}{2\alpha}$.

D'où: $f(\alpha) = 5\alpha^2 + 2\alpha - 2\alpha^2 \times \left[\dfrac{4\alpha + 1}{2\alpha} \right]$

$$= 5\alpha^2 + 2\alpha - 4\alpha^2 - \alpha$$

$$= \alpha^2 + \alpha.$$

Ainsi nous avons bien: $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$.

5. b. b_2. Déduisons-en un encadrement à 10^{-2} près du max de f :

Nous savons que le maximum de f sur $]\,0\,;+\infty\,[$ a pour coordonnées $(\alpha\,; f(\alpha))$.

Or: • $7,87 < \alpha < 7,88$

• $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$.

Après calcul, un encadrement à 10^{-2} près du maximum de f sur $]\,0\,;+\infty\,[$ est: $69,80 < f(\alpha) < 69,97$.