# BACCALAURÉAT
# MATHÉMATIQUES

## SUJET 1

## CORRIGÉ EXERCICE 2

## NOUVELLE CALÉDONIE
## 2023

$$U_{n+1} = 5U_n - 4n - 3$$

# CORRECTION

**1. a. Montrons que $U_1 = 12$:**

Ici: • $U_{n+1} = 5U_n - 4n - 3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $U_0 = 3$.

Dans ces conditions: $U_1 = 5 \times U_0 - 4 \times 0 - 3 = 5 \times 3 - 0 - 3 = 12$.

Ainsi: $U_1 = 12$.

**1. b. Déterminons $U_2$:**

Sachant que $U_1 = 12$: $U_2 = 5 \times U_1 - 4 \times 1 - 3 = 5 \times 12 - 4 - 3 = 53$.

Ainsi: $U_2 = 53$.

**1. c. Conjecturons le sens de variation ainsi que la limite de la suite $(U_n)$:**

A l'aide de la calculatrice, les conjectures que nous pouvons émettre sont:

- la suite $(U_n)$ semble être croissante
- la suite $(U_n)$ semble tendre vers $+\infty$.

**2. a. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geqslant n + 1$:**

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n \geqslant n + 1$ ".

**Initialisation**: $U_0 = 3$, d'après l'énoncé.

Et: $0 + 1 = 1$.

Or: $3 \geqslant 0 + 1$, et donc $U_0 \geqslant 0 + 1$.

**Donc vrai au rang " 0 ".**

**Hérédité**: Supposons que pour un certain entier naturel n, $U_n \geqslant n + 1$

et montrons qu'alors $U_{n+1} \geqslant (n + 1) + 1$ cad $U_{n+1} \geqslant n + 2$.

**Supposons**: $U_n \geqslant n + 1$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

D'où: (1) => $5\ U_n \geqslant 5\ (n + 1)$

=> $5\ U_n - 4n \geqslant 5\ (n + 1) - 4n$

=> $5\ U_n - 4n - 3 \geqslant 5\ (n + 1) - 4n - 3$

=> $5\ U_n - 4n - 3 \geqslant n + 2$

=> $U_{n+1} \geqslant n + 2$ $( = (n + 1) + 1 )$.

**Conclusion**: Pour tout entier naturel n, $U_n \geqslant n + 1$.

**2. b. Déduisons-en la limite de la suite $(U_n)$:**

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} n + 1, \text{ car : } U_n \geq n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} n$$

$$= +\infty.$$

Ainsi: $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty.$

3. a. Montrons que $(V_n)$ est géométrique et déterminons sa raison et son premier terme:

$$V_n = U_n - n - 1 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - (n + 1) - 1$$

$$\iff V_{n+1} = U_{n+1} - n - 2$$

$$\iff V_{n+1} = (5\,U_n - 4n - 3) - n - 2. \quad (1)$$

Or: $U_n = V_n + n + 1.$

D'où: $(1) \iff V_{n+1} = (5\,[\,V_n + n + 1\,] - 4n - 3) - n - 2$

$$\iff V_{n+1} = 5 \times V_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

De plus: $V_0 = U_0 - 0 - 1$ cad $V_0 = 3 - 0 - 1 = 2.$

Par conséquent: $(V_n)$ est une suite géométrique du raison $q = 5$ et de premier terme $V_0 = 2.$

3. b. Déduisons-en l'expression de $V_n$ en fonction de $n$:

Pour tout entier naturel $n$, nous avons: $V_n = V_0 \times q^n$ cad $V_n = 2 \times 5^n.$

**3. c. Déduisons-en que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2 \times 5^n + n + 1$:**

Comme pour tout entier naturel $n$, $V_n = 2 \times 5^n$ et $U_n = V_n + n + 1$, nous pouvons écrire: $U_n = 2 \times 5^n + n + 1$.

**3. d. Déduisons-en le sens de variation de la suite $(U_n)$:**

Pour cela, nous devons déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$.

Or: $U_{n+1} - U_n = (2 \times 5^{(n+1)} + (n+1) + 1) - (2 \times 5^n + n + 1)$

$= 5^n (10 - 2) + 1$

$= 8 \times 5^n + 1 > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $U_{n+1} - U_n > 0$: la suite $(U_n)$ est strictement croissante.

**4. a. Recopions et complétons les deux instructions manquantes:**

Le programme Python (complété) destiné à renvoyer le plus petit entier naturel $n$ tel que $U_n \geqslant 10^7$ est le suivant:

```
def suite():
    u=3
    n=0
    while u<10**7:
        u= 5*u-4*n-3
        n=n+1
    return n
```

**4. b. Déterminons la valeur renvoyée par cette fonction:**

La valeur renvoyée par cette fonction est: $n = 10$.

En effet:

| $u$ | $n$ | $u < 10^7$ |
|---|---|---|
| 3 | 0 | VRAI |
| 12 | 1 | VRAI |
| 53 | 2 | VRAI |
| 254 | 3 | VRAI |
| 1255 | 4 | VRAI |
| 6256 | 5 | VRAI |
| 31257 | 6 | VRAI |
| 156258 | 7 | VRAI |
| 781259 | 8 | VRAI |
| 3906260 | 9 | VRAI |
| 19531261 | 10 | FAUX |