BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 3

FRANCE MÉTROPOLITAINE
2023

LE RECTANGLE AH_1HH_2

CORRECTION

1. a. Donnons les coordonnées d'un vecteur $\vec{n_1}$ normal au plan P_1:

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ s'écrit:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Or ici:
- une équation cartésienne du plan P_1 est: $2x + y - z + 2 = 0$
- $A(x_A; y_A; z_A)$
- $\vec{n_1}(a; b; c)$.

Dans ces conditions: $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad ax + by + cz + (-ax_A - by_A - cz_A) = 0.$$

Par identification avec l'équation cartésienne du plan P_1, nous avons:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad -ax_A - by_A - cz_A = 2.$$

Ainsi, $\vec{n_1}$ a pour coordonnées: $a = 2$, $b = 1$, $c = -1$.

1. b. Montrons que les plans P_1 et P_2 sont perpendiculaires:

Nous savons que deux plans sont perpendiculaires si un vecteur normal à l'un des plans est orthogonal à un vecteur normal à l'autre plan.

Ici: • $\vec{n_1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P_1

• $\vec{n_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P_2.

Les vecteurs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont orthogonaux ssi: $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$.

Or: $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = (2 \times 1) + (1 \times -1)(-1 \times 1) = 0$.

Donc: les plans P_1 et P_2 sont bien perpendiculaires.

2. a. Déterminons une équation cartésienne du plan P_2:

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}(a ; b ; c)$ s'écrit:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Or ici: • un vecteur normal au plan P_2 est $\vec{n_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

• le point $B(1 ; 1 ; 2) \in P_2$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a(x - x_B) + b(y - y_B) + c(z - z_B) = 0$

$$\Longleftrightarrow \ 1 \times (x-1) + (-1) \times (y-1) + 1 \times (z-2) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \ x - 1 - y + 1 + z - 2 = 0$$

cad $x - y + z - 2 = 0.$

Une équation cartésienne du plan P_2 est donc: $x - y + z - 2 = 0.$

2. b. Montrons que la droite Δ est l'intersection des plans P_1 et P_2:

Une représentation paramétrique de la droite Δ est:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + t \\ z = t \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

La droite Δ est l'intersection des plans P_1 et P_2 ssi:

$$\begin{cases} 2x + y - z + 2 = 0 & (1) \\ x - y + z - 2 = 0 & (2) \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2x + y - z + 2 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x = 0 & (1) + (2) \\ x - y + z - 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z - 2 \end{cases}$$

$$\text{cad}\begin{cases} x = 0 \\ y = t - 2 \,,\, t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

Nous retrouvons ainsi la représentation paramétrique de la droite Δ de l'énoncé, et donc: la droite Δ est bien l'intersection des plans P_1 et P_2.

3. a. Montrons que pour tout réel t, $AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$:

D'après l'énoncé: • $A\,(1; 1; 1)$

• $M_t\,(0; -2 + t; t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Dans ces conditions: $AM_t^{\,2} = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 + (z_M - z_A)^2$

$= (0 - 1)^2 + (-2 + t - 1)^2 + (t - 1)^2$

$= 1 + (t - 3)^2 + (t - 1)^2$

$= 1 + (t^2 + 9 - 6t) + (t^2 + 1 - 2t)$

$= 2t^2 - 8t + 11.$

Au total, pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons bien: $AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$.

3. b. Déduisons-en que $AH = \sqrt{3}$:

D'après l'énoncé: • $A\,(1; 1; 1)$

• H = projeté orthogonal de A sur Δ.

Étape 1: détermination des coordonnées du point H.

Comme le point H est le projeté orthogonal de A sur Δ ses coordonnées

sont telles que: $\begin{cases} x_H = 0 \\ y_H = -2 + t \\ z_H = t \end{cases}$, avec t tel que AM_t minimum.

AM_t est minimum quand $\sqrt{2t^2 - 8t + 11}$ est minimum cad quand:

$$2t^2 - 8t + 11 \text{ est minimum.}$$

Soit f la fonction définie sur IR par: $f(t) = 2t^2 - 8t + 11$.

f est dérivable sur IR comme fonction polynôme et nous pouvons ainsi calculer la dérivée f' pour tout $t \in$ IR: $f'(t) = 4t - 8$.

$f'(t) = 0$ quand $4t - 8 = 0$ cad quand $t = 2$.

Donc AM_t est minimum quand $t = 2$.

Les coordonnées de H sont donc: $x_H = 0$, $y_H = 0$ et $z_H = 2$.

Étape 2: calcul effectif de AH.

$AH^2 = (x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 + (z_H - z_A)^2$

$= (0 - 1)^2 + (0 - 1)^2 + (2 - 1)^2$

$= (1)^2 + (1)^2 + (1)^2$

$= 3$.

Ainsi, nous avons bien: $AH = \sqrt{3}$.

4. a. Déterminons une représentation paramétrique de la droite D_1:

D'après le cours, nous savons que:

- Soit A (x_A ; y_A ; z_A) un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}$ (a ; b ; c) un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases}, t \in IR.$$

Ici: • la droite D_1 passe par le point A (1 ; 1 ; 1)

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite D_1 est: $\vec{u} = \vec{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

D'où une représentation paramétrique de la droite D_1 passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{n_1}$ (2 ; 1 ; - 1) s'écrit:

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \times t \\ y = 1 + t, \\ z = 1 + (-1) \times t \end{cases}, t \in IR.$$

Une représentation paramétrique de la droite D_1 est donc:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in IR.$$

4. b. Déduisons-en que le point H_1 a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$:

Nous savons que H_1 est le projeté orthogonal du point A sur le plan P_1.

Le point H_1 est donc le point d'intersection entre la droite D_1 et le plan P_1.

Les coordonnées du point H_1 vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t & (1) \\ y = 1 + t & (2) \\ z = 1 - t & (3) \\ 2x + y - z + 2 = 0 & (4) \end{cases}$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$$(4) \iff 2x + y - z + 2 = 0 \iff 2(1 + 2t) + (1 + t) - (1 - t) + 2 = 0$$

$$\iff 2 + 4t + 1 + t - 1 + t + 2 = 0$$

cad $t = -\frac{2}{3}$.

Les coordonnées du point H_1 sont donc:

- $x_{H_1} = 1 + 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3}$
- $y_{H_1} = 1 + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$
- $z_{H_1} = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3}$.

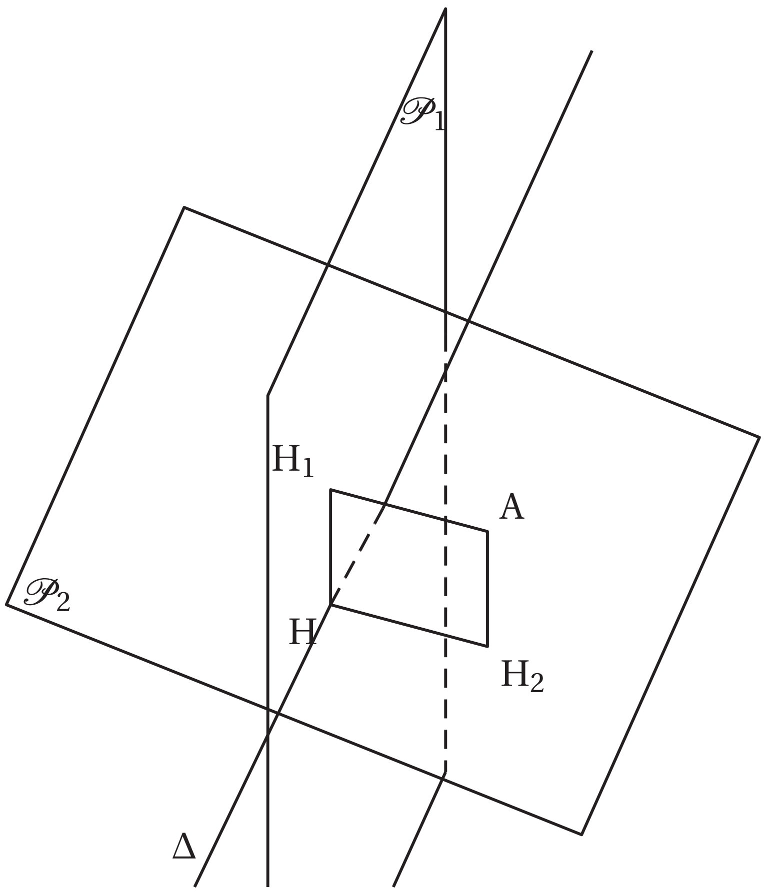
5. Montrons que AH_1HH_2 est un rectangle:

Nous savons que: • $A(1;1;1)$

• $H(0;0;2)$

• $H_1\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$

• $H_2\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$.



Dans ces conditions: • $\overrightarrow{AH_1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}-1 \\ \frac{1}{3}-1 \\ \frac{5}{3}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{H_2H} \begin{pmatrix} 0 - \frac{4}{3} \\ 0 - \frac{2}{3} \\ 2 - \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Et donc: $\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{H_2H}$.

Le quadrilatère AH_1HH_2 est donc un parallélogramme.

La droite (AH_1) et orthogonale au plan P_1 et H_1 appartient à ce plan; donc (AH_1) est perpendiculaire à toutes les droites de P_1 passant par H_1, en particulier la droite (HH_1).

Le parallélogramme AH_1HH_2 possède un angle droit: c'est donc bien un rectangle !!!