BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 4

MAYOTTE, RÉUNION

2023

LE TÉTRAÈDRE FNKM

CORRECTION

1. Donnons les coordonnées des points F et C:

Dans le repère orthonormé $(D ; \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$, les coordonnées des points F et C sont:

- $F (1 ; 1 ; 1)$ car $\overrightarrow{DF} = 1 \times \overrightarrow{DH} + 1 \times \overrightarrow{DC} + 1 \times \overrightarrow{DA}$
- $C (0 ; 1 ; 0)$ car $\overrightarrow{DC} = 0 \times \overrightarrow{DH} + 1 \times \overrightarrow{DC} + 0 \times \overrightarrow{DA}$.

Ainsi, les coordonnées des points F et C sont: $F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Calculons les coordonnées des points M et N:

- M est le milieu de [CF] et donc $\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_F + x_C}{2} \\ \dfrac{y_F + y_C}{2} \\ \dfrac{z_F + z_C}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ 1 \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

• N est le milieu de [FH] et donc $\begin{pmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_H + x_F}{2} \\ \dfrac{y_H + y_F}{2} \\ \dfrac{z_H + z_F}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Les coordonnées des points M et N sont donc: $M \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ 1 \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $N \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3. a. Montrons que $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (HFC):

Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (HFC) ssi ce vecteur est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan (HFC).

Les vecteurs $\overrightarrow{HF}$ (0; 1; 1) et $\overrightarrow{FC}$ (- 1; 0; - 1) ne sont pas proportionnels et ne sont donc pas colinéaires.

Les points H, F et C ne sont donc pas alignés et définissent le plan (HFC).

Par conséquent, le plan (HFC) admet pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{FC}$.

Ici: • le vecteur $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} x_G - x_A \\ y_G - y_A \\ z_G - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 1 - 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

• les deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (HFC) ont pour coordonnées: • $\overrightarrow{HF} = \begin{pmatrix} x_F - x_H \\ y_F - y_H \\ z_F - z_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 1 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{FC} = \begin{pmatrix} x_C - x_F \\ y_C - y_F \\ z_C - z_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 1 - 1 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Or: $\begin{cases} \overrightarrow{AG} \text{ et } \overrightarrow{HF} \text{ sont orthogonaux ssi } \overrightarrow{AG} . \overrightarrow{HF} = 0 \\ \overrightarrow{AG} \text{ et } \overrightarrow{FC} \text{ sont orthogonaux ssi } \overrightarrow{AG} . \overrightarrow{FC} = 0. \end{cases}$

Nous avons: • $\overrightarrow{AG} . \overrightarrow{HF} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0$

• $\overrightarrow{AG} . \overrightarrow{FC} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + (-1) \times (-1) = 0$.

Comme $\overrightarrow{AG}$ est bien orthogonal à $\overrightarrow{HF}$ et à $\overrightarrow{FC}$: le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (HFC).

3. b. Déduisons-en une équation cartésienne du plan (HFC):

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point A ($x_A ; y_A ; z_A$) et un vecteur normal $\vec{n}$ ($a ; b ; c$) s'écrit:

$$a (x - x_A) + b (y - y_A) + c (z - z_A) = 0.$$

Or ici: • un vecteur normal est $\vec{n} = \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

• le point F ∈ (HFC), avec $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a (x - x_F) + b (y - y_F) + c (z - z_F) = 0$

<=> $1 \times (x - 1) + 1 \times (y - 1) + (-1) \times (z - 1) = 0$

cad $x + y - z - 1 = 0$.

Une équation cartésienne du plan (HFC) est donc: $x + y - z - 1 = 0$.

4. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (AG):

D'après le cours, nous savons que:

- Soit $A (x_A ; y_A ; z_A)$ un point de l'espace.
- Soit $\vec{u} (a ; b ; c)$ un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases} , t \in IR.$$

Ici: • la droite (AG) passe par le point **A (0 ; 0 ; 1)**,

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (AG) est:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} x_G - x_A \\ y_G - y_A \\ z_G - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

D'où une représentation paramétrique de la droite (AG) passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ (1 ; 1 ; - 1) s'écrit:

$$\begin{cases} x = 0 + 1 \times t \\ y = 0 + 1 \times t \\ z = 1 + (- 1) \times t \end{cases} , t \in IR.$$

Une représentation paramétrique de la droite (AG) est donc:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

5. **Montrons que les coordonnées du point R sont $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$:**

Le point **R** est le projeté orthogonal du point G sur le plan (HFC).

Le point **R** est donc le point d'intersection entre la droite (AG) et le plan (HFC).

Les coordonnées du point **R** vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_R = t & (1) \\ y_R = t & (2) \\ z_R = 1 - t & (3) \\ x_R + y_R - z_R - 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$$(4) \iff x_R + y_R - z_R - 1 = 0 \iff t + t - (1 - t) - 1 = 0$$

$$\iff 3t - 2 = 0$$

cad $t = \frac{2}{3}$.

Les coordonnées du point R sont donc:

- $x_R = \frac{2}{3}$
- $y_R = \frac{2}{3}$

• $z_R = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

6. Démontrons qu'il existe bien un unique point K sur la droite (FG) tel que le triangle KMN soit rectangle en K:

D'après l'énoncé: • le point $K \in (FG)$

• une représentation paramétrique de la droite (FG) est

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Les coordonnées du point K sont donc de la forme: $(1; 1; t), t \in \mathbb{R}$.

Le triangle KMN est rectangle en K ssi: les vecteurs $\overrightarrow{MK}$ et $\overrightarrow{NK}$ sont orthogonaux.

Or, $\overrightarrow{MK}$ et $\overrightarrow{NK}$ sont orthogonaux ssi $\overrightarrow{MK} . \overrightarrow{NK} = 0$, avec les points:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{MK} . \overrightarrow{NK} = \begin{pmatrix} x_K - \frac{1}{2} \\ y_K - 1 \\ z_K - \frac{1}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_K - 1 \\ y_K - \frac{1}{2} \\ z_K - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ t - \frac{1}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ t - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 0 \right) + \left(0 \times \frac{1}{2} \right) + \left(t - \frac{1}{2} \right) \times \left(t - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 .$$

D'où, $\overrightarrow{MK}$ et $\overrightarrow{NK}$ sont orthogonaux ssi: $\left(t - \frac{1}{2} \right)^2 = 0$ **cad ssi** $t = \frac{1}{2}$.

Les coordonnées du point K sont donc: $(1 ; 1 ; t) = \left(1 ; 1 ; \frac{1}{2} \right)$.

7. Quelle fraction ?

Ici, nous devons déterminer la fraction du volume du **cube ABCDEFGH** que le volume du **tétraèdre FNKM** représente.

Notons que le tétraèdre FNKM a pour **hauteur** [FK] et pour **base le triangle KMN**.

Nous avons: $F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $K \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $M \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ **et** $N \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions: • $KM = \frac{1}{2}$,

- $KN = \frac{1}{2}$,

- l'aire du triangle KMN $= \frac{KM \times KN}{2}$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{2}$$

$$= \frac{1}{8}.$$

Le volume du tétraèdre FNKM est donc:

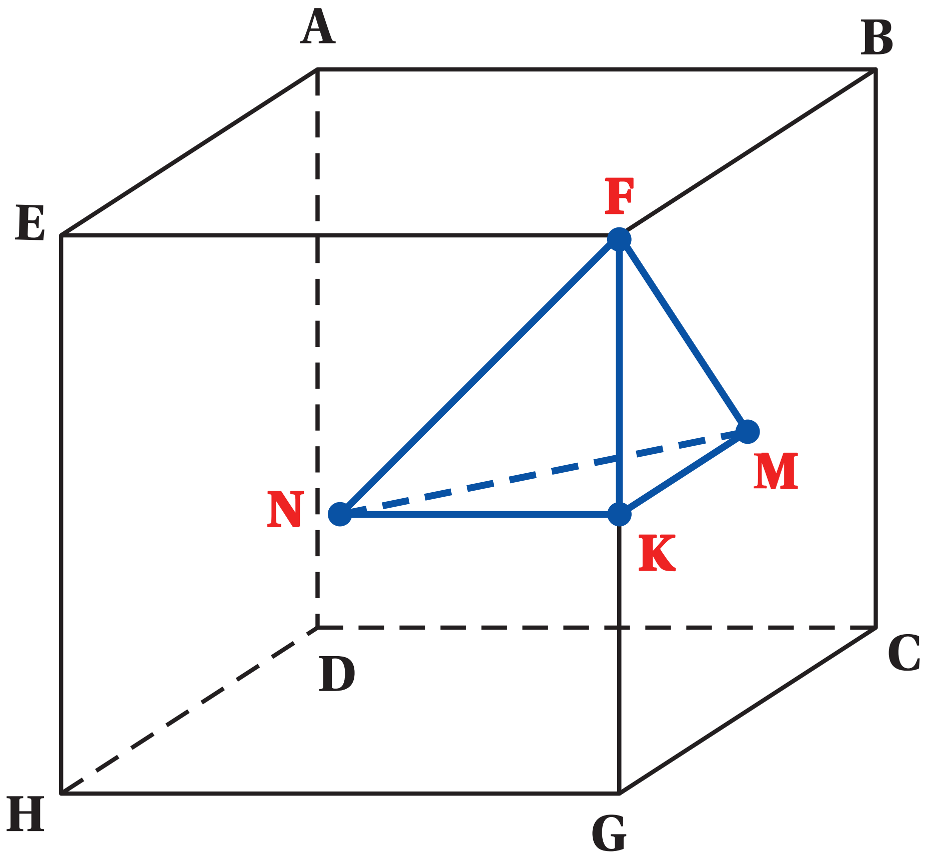
$$\frac{(\text{ Aire base triangle KMN }) \times (\text{ Hauteur tétraèdre FNKM })}{3}$$

$$= \frac{(\text{ Aire base triangle KMN }) \times FK}{3}$$

$$= \frac{\frac{1}{8} \times \frac{1}{2}}{3}$$

$$= \frac{1}{48}.$$

Comme le volume de cube est égal à 1 et celui du tétraèdre FNKM à $\frac{1}{48}$:
la fraction recherchée est égale à un quarante-huitième.


A
B
E
F
N
M
K
D
C
H
G