www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 4

2023

50% DE LA DISTANCE DE " F " AU PLAN $\mathcal{P}$

CORRECTION

1. Montrons que les points A, B et C définissent un plan $\mathcal{P}$:

Nous savons que: $A(-1;-3;2)$, $B(3;-2;6)$ et $C(1;2;-4)$.

Les points A, B et C définissent un plan ssi **les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires**.

Or: • $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Et: $x_{\overrightarrow{AB}} = 2 \times x_{\overrightarrow{AC}}$ et $y_{\overrightarrow{AB}} \neq 2 \times y_{\overrightarrow{AC}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés.

Les points A, B et C définissent donc bien un plan nommé $\mathcal{P}$.

2. a. Montrons que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 13 \\ -16 \\ -9 \end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathcal{P}$:

Freemaths : Tous droits réservés

Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan $\mathcal{P}$ ssi ce vecteur est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$.

Le plan $\mathcal{P}$ admet pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan $\mathcal{P}$ ssi: $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.

Or: $\begin{cases} \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0. \end{cases}$

Nous avons:
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = (13 \times 4) + ((-16) \times 1) + ((-9) \times 4) = 0$
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = (13 \times 2) + ((-16) \times 5) + ((-9) \times (-6)) = 0.$

Comme $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan $\mathcal{P}$.

2. b. Montrons qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $13x - 16y - 9z - 17 = 0$:

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et un vecteur normal $\vec{u}(a ; b ; c)$ s'écrit:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Or ici:
- un vecteur normal est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 13 \\ -16 \\ -9 \end{pmatrix}$
- le point $C \in \mathcal{P}$, avec $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a(x - x_C) + b(y - y_C) + c(z - z_C) = 0$

$$\Leftrightarrow 13 \times (x - 1) - 16 \times (y - 2) - 9 \times (z - (-4)) = 0$$

Freemaths : Tous droits réservés

cad $13x - 13 - 16y + 32 - 9z - 36 = 0$.

Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est donc: $13x - 16y - 9z - 17 = 0$.

3. Donnons une représentation paramétrique de la droite D:

D'après le cours, nous savons que:

- Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}(a; b; c)$ un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

Ici:
- la droite D passe par le point $F(15; -16; -8)$,
- un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite D est: $\vec{u} = \vec{n} = \begin{pmatrix} 13 \\ -16 \\ -9 \end{pmatrix}$.

D'où une représentation paramétrique de la droite D passant par le point F et de vecteur directeur $\vec{u}(13; -16; -9)$ s'écrit: $\begin{cases} x = 15 + 13 \times t \\ y = -16 + (-16) \times t \\ z = -8 + (-9) \times t \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$

Une représentation paramétrique de la droite D est donc:

Freemaths : Tous droits réservés

$$\begin{cases} x = 15 + 13t \\ y = -16 - 16t \\ z = -8 - 9t \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

4. Montrons que le point E a pour coordonnées (2 ; 0 ; 1):

Le point **E** est le point d'intersection de la droite D et du plan $\mathcal{P}$ d'équation:

$$13x - 16y - 9z - 17 = 0.$$

Les coordonnées du point **E** vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_E = 15 + 13t & (1) \\ y_E = -16 - 16t & (2) \\ z_E = -8 - 9t & (3) \\ 13x_E - 16y_E - 9z_E - 17 = 0 & (4) \end{cases}$$

A l'aide des équations **(1)**, **(2)** et **(3)**, nous pouvons écrire:

$(4) \iff 13x_E - 16y_E - 9z_E - 17 = 0$

$\iff 13 \times (15 + 13t) - 16 \times (-16 - 16t) - 9 \times (-8 - 9t) - 17 = 0$

$\iff 506 \times t + 506 = 0$

cad $t = -1$.

Les coordonnées du point E sont donc bien:

- $x_E = 15 + 13 \times (-1) = 2$
- $y_E = -16 - 16 \times (-1) = 0$
- $z_E = -8 - 9 \times (-1) = 1$.

Freemaths : Tous droits réservés

5. Déterminons la valeur exacte de la distance du point F au plan $\mathcal{P}$:

E est le point d'intersection de la droite D et du plan $\mathcal{P}$.

La distance de F au plan $\mathcal{P}$ est donc égale à la distance du point F $\begin{pmatrix} 15 \\ -16 \\ -8 \end{pmatrix}$ au point E $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ cad: FE.

$$FE = \sqrt{(2-15)^2 + (0-(-16))^2 + (1-(-8))^2}$$

$$= \sqrt{13^2 + 16^2 + 9^2}$$

$$= \sqrt{506}.$$

La valeur exacte de la distance du point F au plan $\mathcal{P}$ est donc: $\sqrt{506}$.

6. Déterminons les coordonnées des points de la droite D dont la distance au plan $\mathcal{P}$ est égale à 50% de FE:

Il existe deux points qui répondent à la question:

- le point $X_1(x_1; y_1; z_1)$ tel que $\overrightarrow{EX_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$
- le point $X_2(x_2; y_2; z_2)$ tel que $\overrightarrow{EX_2} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$.

Détermination des coordonnées du point X_1:

$$\overrightarrow{EX_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} \iff \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ y_1 - 0 \\ z_1 - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 15-2 \\ -16-0 \\ -8-1 \end{pmatrix}$$

Freemaths : Tous droits réservés

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2 = 6,5 \\ y_1 = -8 \\ z_1 - 1 = -4,5 \end{cases}$$

$$\text{cad} \begin{cases} x_1 = 8,5 \\ y_1 = -8 \\ z_1 = -3,5 \end{cases}.$$

Détermination des coordonnées du point X_2:

$$\overrightarrow{EX_2} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 - 2 \\ y_2 - 0 \\ z_2 - 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 15 - 2 \\ -16 - 0 \\ -8 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - 2 = -6,5 \\ y_2 = 8 \\ z_2 - 1 = 4,5 \end{cases}$$

$$\text{cad} \begin{cases} x_2 = -4,5 \\ y_2 = 8 \\ z_2 = 5,5 \end{cases}.$$

Les coordonnées des points recherchés sont donc:

$X_1 (8,5 ; -8 ; -3,5)$ et $X_2 (-4,5 ; 8 ; 5,5)$.

Freemaths : Tous droits réservés