# BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

## SUJET 1

## CORRIGÉ EXERCICE 3

## CENTRES ÉTRANGERS 2

## 2023

# Questionnaire à Choix Multiple

**RÉPONSES** B C D B D

**1. Sur $\mathbb{R}$, $f(x) = x\,e^x$ et une primitive F de $f$ sur $\mathbb{R}$ est...**

Ici: • $f(x) = x\,e^x$

• $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$.

$f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$ cad une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que: $F' = f$.

Une primitive $f$ sur $\mathbb{R}$ est: $F(x) = (x - 1)\,e^x$.

En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons bien:

$$F'(x) = (1) \times (e^x) + (x - 1) \times (e^x)$$

$$= x\,e^x$$

$$= f(x).$$

$f$ admet donc comme primitive, la fonction F avec: $F(x) = (x - 1)\,e^x$.

2. La fonction $g(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{2x+4}\right)$ est définie sur ...

La fonction $g(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{2x+4}\right)$ est définie ssi : $\begin{cases} \bullet\ 2x+4 \neq 0 \\ \bullet\ \dfrac{x-1}{2x+4} > 0 \end{cases}$.

• $2x + 4 \neq 0$ ssi $x \neq -2$.

• Dressons un tableau de signe pour l'étude de $\dfrac{x-1}{2x+4}$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $2x+4$ | | $-$ | \|\| | $+$ | | $+$ | |
| $\dfrac{x-1}{2x+4}$ | | $+$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |

D'ou: $\dfrac{x-1}{2x+4} > 0$ ssi $x \in ]-\infty ; -2[ \cup ]1 ; +\infty[$.

Ainsi la fonction g est définie sur : $]-\infty ; -2[ \cup ]1 ; +\infty[$.

3. Sur $\mathbb{R}$, $h(x) = (x+1)\, e^x$ et la fonction h est ...

Ici : • $h(x) = (x+1)\, e^x$

• $\mathcal{D}h = \mathbb{R}$.

Pour répondre à la question, nous allons calculer h' et h'' sur $\mathbb{R}$.

La fonction h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, nous pouvons calculer h' et h'' pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• **$h'(x)$** $= (1) \times (e^x) + (x + 1) \times (e^x)$

$= (x + 2)\, e^x$.

• **$h''(x)$** $= (1) \times (e^x) + (x + 2) \times (e^x)$

$= (x + 3)\, e^x$.

Notons que le signe de h'' dépend uniquement du signe de $(x + 3)$ car $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Distinguons deux cas : • $x + 3 \leqslant 0$ ssi $x \leqslant -3$

• $x + 3 \geqslant 0$ ssi $x \geqslant -3$.

Or, d'après le cours : • h est concave sur $I$ ssi $h''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$

• h est convexe sur $I$ ssi $h''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.

Ainsi : • h est concave sur $]-\infty\,; -3]$,

• h est convexe sur $[-3\,; +\infty[$.

4. $(U_n)$ est minorée par 3 et converge vers $\ell$...

Comme dans l'énoncé, rien n'est dit sur la croissance ou décroissance de la suite $(U_n)$, la seule chose que nous pouvons affirmer est que : $\ell \geqslant 3$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_{n+1} = \frac{1}{n} W_n$ avec $W_1 = 2$ **et** $(W_n)$...

Pour répondre à cette question, nous allons essayer de voir comment évolue cette suite $(W_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour cela, calculons $W_2$, $W_3$, $W_4$ et $W_5$ avec $W_{n+1} = \frac{1}{n} W_n$ et $W_1 = 2$.

- $W_2 = \frac{1}{1} W_1 = 2 = \frac{1}{2-1} \times W_1$

- $W_3 = \frac{1}{2} W_2 = 1 = \frac{1}{3-1} \times W_2$

- $W_4 = \frac{1}{3} W_3 = \frac{1}{3} = \frac{1}{4-1} \times W_3$

- $W_5 = \frac{1}{4} W_4 = \frac{1}{12} = \frac{1}{5-1} \times W_4$.

Ainsi une relation logique de **récurrence** apparaît:

$$W_5 = \left(\frac{1}{5-1}\right) \times W_4$$

$$= \left(\frac{1}{5-1}\right) \times \left(\frac{1}{4-1}\right) \times W_3$$

$$= \left(\frac{1}{5-1}\right) \times \left(\frac{1}{4-1}\right) \times \left(\frac{1}{3-1}\right) \times W_2$$

$$= \left(\frac{1}{5-1}\right) \times \left(\frac{1}{4-1}\right) \times \left(\frac{1}{3-1}\right) \times \left(\frac{1}{2-1}\right) \times W_1$$

$$= \frac{1}{(5-1)!} \times W_1 \quad \text{cad} \quad \frac{1}{(5-1)!} \times 2.$$

A l'ordre " n ", nous avons donc: $W_n = \frac{2}{(n-1)!}$.

Or: $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{(n-1)!} = 0.$

Ainsi, la suite $(W_n)$ est convergente et converge vers 0.