BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 3

2023

LE PROJET ARCHITECTURAL

CORRECTION

1. a. Donnons les coordonnées des points H, M et N:

Ici, nous sommes en présence d'un repère orthonormé $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec:

$$\vec{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\ \vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \text{ et } \vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}.$$

Et nous avons:

- $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

$= 2 . \vec{j} + 2 . \vec{k}$

$= (0 ; 2 ; 2),$

- $\overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

$= \dfrac{3}{2} \times (2 . \vec{i}) + \dfrac{1}{2} \times (2 . \vec{k})$

$= 3 . \vec{i} + \vec{k}$

$= (3 ; 0 ; 1),$

- $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$

$= [3 . \vec{i} + \vec{k}] + \left[\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right]$

$$= [\, 3 . \vec{i} + \vec{k} \,] + \left[\frac{1}{2} \times (2 . \vec{j} \,) \right]$$

$$= 3 . \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$= (3 ; 1 ; 1).$$

Ainsi les coordonnées des points H, M et N sont:

$$H \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, M \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } N \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. b. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (HM):

D'après le cours, nous savons que:

- Soit A (x_A ; y_A ; z_A) un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}$ (a ; b ; c) un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t . a \\ y = y_A + t . b \\ z = z_A + t . c \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

Ici: • la droite (HM) passe par le point H (0 ; 2 ; 2)

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (HM) est:

$$\vec{u} = \overrightarrow{HM} = \begin{pmatrix} x_M - x_H \\ y_M - y_H \\ z_M - z_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

D'où une représentation paramétrique de la droite (HM) passant par le point H et de vecteur directeur $\vec{u}$ (3 ; -2 ; -1) s'écrit:

$$\begin{cases} x = 0 + 3 \times t \\ y = 2 + (-2) \times t \\ z = 2 + (-1) \times t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Une représentation paramétrique de la droite (HM) est donc:

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. **Montrons que les coordonnées du point P sont $\left(2 ; \frac{2}{3} ; \frac{4}{3}\right)$:**

Le point P est le point d'intersection entre la droite (HM) et le plan (BCF).

Les coordonnées des points B, C et F sont: $B\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Le plan (BCF) est parallèle au plan yAz et a pour équation: $x = 2$.

Or une représentation paramétrique de la droite (HM) est:

$$\begin{cases} x = 3t \quad (1) \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Dans ces conditions: (1) <=> $2 = 3t$ cad $t = \frac{2}{3}$.

D'où: $\begin{cases} x_P = 2 \\ y_P = 2 - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \\ z_P = 2 - \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} \end{cases}$.

Ainsi les coordonnées du point P sont bien: $\left(2 ; \frac{2}{3} ; \frac{4}{3}\right)$.

3. a. Calculons $\overrightarrow{PM} . \overrightarrow{PN}$:

Rappelons que les coordonnées des points P, M et N sont:

$$P\left(2 ; \frac{2}{3} ; \frac{4}{3}\right), M(3 ; 0 ; 1) \text{ et } N(3 ; 1 ; 1).$$

D'où: • $\overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 0-\frac{2}{3} \\ 1-\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{PN} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 1-\frac{2}{3} \\ 1-\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions:

$$\overrightarrow{PM} . \overrightarrow{PN} = (1 \times 1) + \left(\left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{3}\right) + \left(\left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{8}{9}.$$

Le produit scalaire $\overrightarrow{PM} . \overrightarrow{PN}$ est donc égal à: $\frac{8}{9}$.

3. b. Calculons la distance PM:

Nous savons que: $\overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

La distance PM est donc égale à: $PM = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2}$

$$= \sqrt{1 + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{14}}{3}.$$

La distance PM est donc: $PM = \frac{\sqrt{14}}{3}$.

3. c. Le toit pourra-t-il être construit ?

Nous savons que: $PM = \frac{\sqrt{14}}{3}$ et $PN = \frac{\sqrt{11}}{3}$.

Le toit peut être construit que si l'angle $\widehat{MPN}$ ne dépasse pas 55°.

Pour répondre à cette question, nous allons déterminer l'angle $\widehat{MPN}$ noté θ et le comparer à 55°.

L'angle θ est tel que: $\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{PM} . \overrightarrow{PN}}{PM . PN}$ (cours)

$$\Longleftrightarrow \cos(\theta) = \frac{8}{\sqrt{11}\ \sqrt{14}}$$

cad $\theta = 55°$.

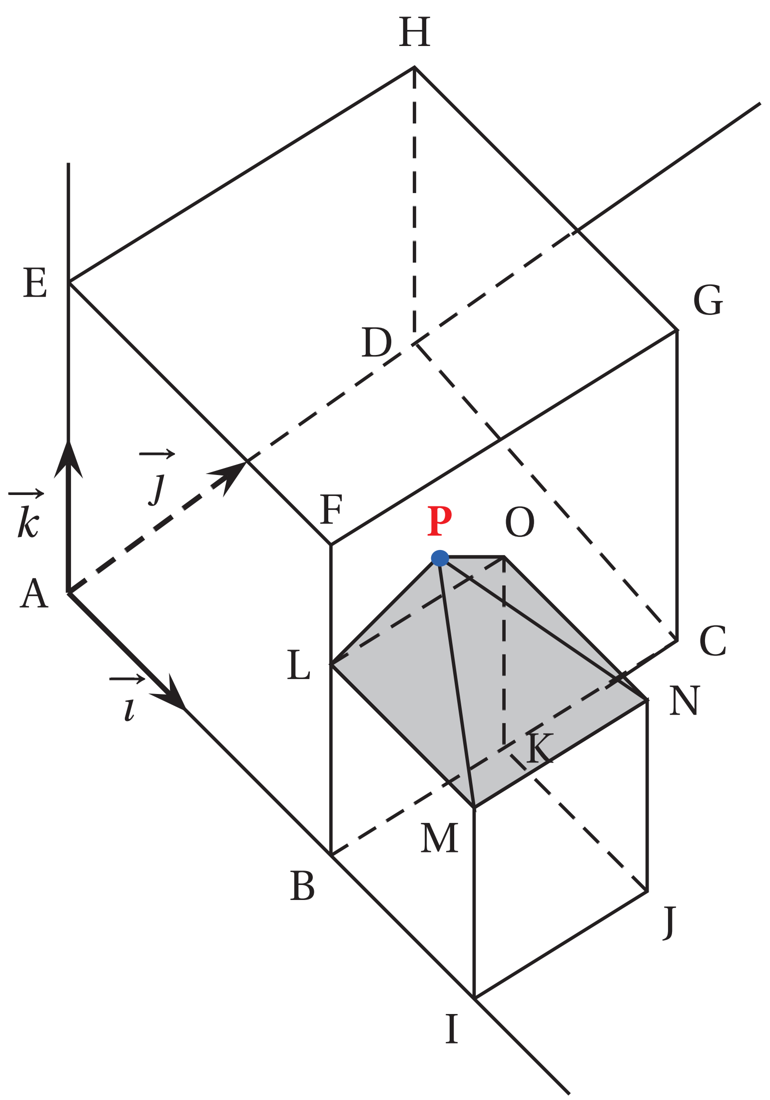
Comme $50° < 55°$: OUI, le toit pourra être construit.

4. Justifions que les droites (HM) et (EN) sont sécantes et déterminons leur point d'intersection:

Les droites (EH) et (MN) sont parallèles donc les droites (HM) et (EN) sont coplanaires et non parallèles: elles sont donc sécantes.

Graphiquement le point d'intersection entre les droites (HM) et (EN) est

le point $P\left(2 ; \frac{2}{3} ; \frac{4}{3}\right)$.



Montrons le mathématiquement !

Nous savons que: • une représentation paramétrique de la droite (HM) est

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases} , t \in \mathbb{R} ;$$

• une représentation paramétrique de la droite (EN) est

$$\begin{cases} x = 3t' \\ y = t' \\ z = 2 - t' \end{cases} , t' \in \mathbb{R} .$$

Le point d'intersection entre les droites (HM) et (EN) vérifie donc le système:

$$\begin{cases} 3t = 3t' \\ 2 - 2t = t' \\ 2 - t = 2 - t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = t' \\ 2 - 2t = t \\ 2 - t = 2 - t \end{cases} \text{ cad } \left\{ t = t' = \frac{2}{3} \right. .$$

Le point d'intersection entre les droites (HM) et (EN) a donc pour

coordonnées: $\begin{cases} x = 3 \times \dfrac{2}{3} = 2 \\ y = \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3} \\ z = 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3} \end{cases}$.

Cela confirme qu'il s'agit bien du point $P\left(2 ; \frac{2}{3} ; \frac{4}{3}\right)$.