BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 3

ASIE
2023

MARIE SKLODOWSKA-CURIE

CORRECTION

1. a. Vérifions que $V_0 = 6 \times 10^{21}$:

D'après l'énoncé:
- $V_0 = 2$g de polonium
- 1 gramme de polonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques.

Dans ces conditions: $V_0 = 2 \times (3 \times 10^{21}) = 6 \times 10^{21}$ noyaux atomiques.

1. b. Justifions que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = 0,995\, V_n + 1,5 \times 10^{19}$:

- D'après 1. a.: $V_0 = 6 \times 10^{21}$ noyaux atomiques.
- De plus, chaque 24 heures:
  - 0,5% des noyaux atomiques **se désintègrent**,
  - **et**, on ajoute 0,005 mg de polonium **cad**:

    $0,005 \times 3 \times 10^{21} = 0,015 \times 10^{21}$ noyaux atomiques.

Soient:
- V_{n+1}, le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de $(n+1)$ jours écoulés,
- V_n, le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours écoulés.

Pour tout entier naturel n, le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de $(n + 1)$ jours est égal à celui V_n **diminué de 0,5%** **et** **augmenté de $0,015 \times 10^{21}$ noyaux**.

Pour tout entier naturel n: $V_{n+1} = V_n - 0,5\% \times V_n + 0,015 \times 10^{21}$

cad $\mathbf{V_{n+1} = 0,995\ V_n + 0,015 \times 10^{21}}$

ou $\mathbf{V_{n+1} = 0,995\ V_n + 1,5 \times 10^{19}}$.

2. a. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant V_{n+1} \leqslant V_n$:

Ici:
- $\mathbf{V_{n+1} = 0,995\ V_n + 1,5 \times 10^{19}}$
- $\mathbf{V_0 = 6 \times 10^{21}}$ **noyaux atomiques**
- $\mathbf{n \in \mathbb{N}}$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $0 \leqslant V_{n+1} \leqslant V_n$ ".

Initialisation: $0 \leqslant V_1 \leqslant V_0$?

$$\begin{cases} \mathbf{V_0 = 6 \times 10^{21}} \text{ d'après l'énoncé} \\ \textbf{et} \\ V_1 = 0,995 \times V_0 + 1,5 \times 10^{19} \quad \textbf{cad} \quad \mathbf{V_1 = 5,985 \times 10^{21}}. \end{cases}$$

Nous avons donc bien: $\mathbf{0 \leqslant V_1 \leqslant V_0}$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $\mathbf{0 \leqslant V_{n+1} \leqslant V_n}$ et montrons qu'alors $\mathbf{0 \leqslant V_{n+2} \leqslant V_{n+1}}$.

Supposons: $0 \leqslant V_{n+1} \leqslant V_n$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

D'où: (1) => $0,995 \times 0 \leqslant 0,995 \times V_{n+1} \leqslant 0,995 \times V_n$

=> $1,5 \times 10^{19} \leqslant 0,995 \times V_{n+1} + 1,5 \times 10^{19} \leqslant 0,995 \times V_n + 1,5 \times 10^{19}$

=> $0 \leqslant 1,5 \times 10^{19} \leqslant V_{n+2} \leqslant V_{n+1}$

=> $0 \leqslant V_{n+2} \leqslant V_{n+1}$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant V_{n+1} \leqslant V_n$.

2. b. Déduisons-en que la suite (V_n) est convergente:

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n:

$$0 \leqslant V_{n+1} \leqslant V_n \iff \begin{cases} V_{n+1} \leqslant V_n \\ V_n \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (V_n) \text{ est décroissante} \\ (V_n) \text{ est minorée par } m = 0 \end{cases}.$$

Or d'après le cours, toute suite décroissante et minorée est convergente.

Donc ici: la suite (V_n) est convergente et converge vers " ℓ ".

3. a. Montrons que la suite (V_n) est géométrique de raison 0, 995:

$U_n = V_n - 3 \times 10^{21} \iff U_{n+1} = V_{n+1} - 3 \times 10^{21}$

$\iff U_{n+1} = (0,995 \times V_n + 1,5 \times 10^{19}) - 3 \times 10^{21}$. (1)

Or: $V_n = U_n + 3 \times 10^{21}$.

D'où: (1) $\iff U_{n+1} = (0,995 [U_n + 3 \times 10^{21}] + 1,5 \times 10^{19}) - 3 \times 10^{21}$

$\iff U_{n+1} = 0,995 \times U_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par conséquent: (U_n) est bien une suite géométrique du raison $q = 0,995$.

3. b. Déduisons-en l'expression de V_n:

• Le premier terme U_0 de la suite (U_n) est: $U_0 = V_0 - 3 \times 10^{21}$

$= 6 \times 10^{21} - 3 \times 10^{21}$

$= 3 \times 10^{21}$.

• Dans ces conditions, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons écrire:

$U_n = (0,995)^n \times U_0$ ou $U_n = (0,995)^n \times (3 \times 10^{21})$.

Comme $V_n = U_n + 3 \times 10^{21}$: $V_n = (0,995^n + 1) \times (3 \times 10^{21})$, pour $n \in \mathbb{N}$.

3. c. Déduisons-en la limite de la suite (V_n) et interprétons:

$\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (0,995^n + 1) \times (3 \times 10^{21})$

$= 3 \times 10^{21}$ car $0,995 \in]0;1[$.

Ainsi: $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 3 \times 10^{21}$.

Cela signifie qu'à long terme, le nombre de noyaux contenus dans le polonium tendra vers 3×10^{21}.

4. Déterminons au bout de combien de jours le nombre de noyaux contenus dans le polonium sera inférieur à $4,5 \times 10^{21}$:

Soit n le nombre de jours recherché.

Nous devons déterminer n tel que: $(3 \times 10^{21}) \times (0,995^n + 1) < 4,5 \times 10^{21}$.

$$V_n < 4,5 \times 10^{21} \iff (3 \times 10^{21}) \times (0,995^n + 1) < 4,5 \times 10^{21}$$

$$\iff 0,995^n + 1 < 1,5$$

$$\iff n \times \ln(0,995) < \ln(0,5)$$

$$\iff n > \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,995)}, \text{ car } 0,995 \in]0;1[$$

cad $n > 138,282$ ou $n \geqslant 139$ jours ($n \in \mathbb{N}$).

Ainsi, le nombre de noyaux contenus dans le polonium sera inférieur à $4,5 \times 10^{21}$ au bout de: 139 jours.

5. a. Proposons deux solutions différentes:

Les deux solutions pour compléter la ligne 5 de la fonction noyaux sont:

- V = 0.995* V + 1.5*10** 19
- V = 3* 10** 21* (0.995** (k + 1) + 1)

5. b. Pour quelle valeur de n ?

La commande noyaux (n) renverra les relevés quotidiens du nombre de noyaux contenus dans l'échantillon pendant 52 semaines d'étude quand: $n = 364$ jours.

Il faut donc écrire: noyaux(364).