BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 2

ASIE
2023

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$$

CORRECTION

PARTIE A

1. Déterminons $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$:

Ici: • $g(x) = e^{2x} - e^x + 1$ (U)

• $\mathcal{D}g = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{2x} - e^x + 1.$$

Or d'après le cours: • $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0 - 0 + 1 = 0$.

2. Déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$:

En $+\infty$, la fonction g peut s'écrire: $g(x) = e^{2x} \times \left[1 - \dfrac{1}{e^x} + \dfrac{1}{e^{2x}} \right]$.

D'où: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} \times \left[1 - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^{2x}} \right]$.

Or d'après le cours:
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \times [\, 1 - 0 + 0 \,] = +\infty$.

3. Montrons que $g'(x) = e^x (2e^x - 1)$, pour tout $x \in IR$:

La fonction $g(x) = e^{2x} - e^x + 1$ est dérivable sur IR comme somme de fonctions dérivables sur IR.

Ainsi, nous pouvons calculer g' pour tout $x \in IR$.

Pour tout $x \in IR$: $g'(x) = 2e^{2x} - e^x$ (U')

$= e^x (2e^x - 1)$.

Ainsi, pour tout $x \in IR$: $g'(x) = e^x (2e^x - 1)$.

4. a. Étudions le sens de variations de la fonction g sur IR:

Distinguons deux cas pour tout $x \in IR$.

1er cas: $g'(x) \leqslant 0$.

$g'(x) \leqslant 0 \iff e^x (2e^x - 1) \leqslant 0$

$\iff 2e^x - 1 \leqslant 0$ **car**: $e^x > 0$, pour tout $x \in IR$

$\iff e^x \leqslant \dfrac{1}{2}$

cad $x \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ou $x \leqslant -\ln(2)$ ou $x \in]-\infty ; -\ln(2)]$.

2ᵉ cas: $g'(x) \geqslant 0$.

$g'(x) \geqslant 0 \iff e^x(2e^x - 1) \geqslant 0$

$\iff 2e^x - 1 \geqslant 0$ **car**: $e^x > 0$, pour tout $x \in IR$

$\iff e^x \geqslant \dfrac{1}{2}$

cad $x \geqslant \ln\dfrac{1}{2}$ ou $x \geqslant -\ln(2)$ ou $x \in [-\ln(2) ; +\infty[$.

Ainsi: • g est décroissante sur $]-\infty ; -\ln(2)]$,

• g est croissante sur $[-\ln(2) ; +\infty[$.

4. b. Dressons le tableau de variations de g sur IR:

Le tableau de variations de la fonction g sur IR est:

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	a	$\searrow$	b	$\nearrow$	c

Avec: • $a = 1$

• $b = g(-\ln(2)) = \frac{3}{4}$ (minimum de g sur $\mathbb{R}$)

• $c = +\infty$.

5. Déduisons-en le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$:

Le minimum de g sur $\mathbb{R}$ a pour ordonnée: $g(-\ln(2)) = \frac{3}{4} > 0$.

Par conséquent, nous pouvons affirmer que les valeurs de g sont toutes strictement positives et donc: $g(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6. Comment on pourrait établir le résultat précédent en posant $X = e^x$?

En posant $X = e^x$, nous avons: $g(x) = X^2 - X + 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit l'équation: $X^2 - X + 1 = 0$. $(aX^2 + bX + c = 0)$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-1)^2 - 4 \times (1) \times (1)$

$= -3 < 0$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$ et donc:

$g(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ car $a = 1 > 0$.

PARTIE B

1. Justifions que f est bien définie sur $\mathbb{R}$:

Ici: • $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$ ($\ln(U)$)

• $\mathcal{D}f = ?$

Nous remarquons que: $f(x) = \ln[g(x)]$.

La fonction f est définie ssi: $g(x) > 0$.

Or nous avons vu que: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

Donc: f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Justifions que $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

Comme déjà indiqué: $f(x) = \ln(g(x))$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$. (formule de cours)

3. Déterminons une équation de la tangente à $\mathcal{C}f$ au point $A(0; f(0))$:

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}f$ au point $A(0; f(0))$ s'écrit:

$$y = f'(x_A) \times (x - x_A) + f(x_A)$$

cad: $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$.

Or ici: • $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

• $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)} = \dfrac{e^x(2e^x - 1)}{(e^{2x} - e^x + 1)}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- $f(0) = 0$,

- $f'(0) = 1$.

Dans ces conditions: $y = 1 \times (x - 0) + 0$

cad: $y = x$.

L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A $(0 ; 0)$ est donc: $y = x$.

4. Montrons que f est croissante sur $[-\ln(2) ; +\infty[$:

Nous savons que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
- $e^x > 0$
- $g(x) > 0$, d'après PARTIE A.

Dans ces conditions, le signe de $f'(x) = \dfrac{e^x(2e^x - 1)}{g(x)}$ dépend uniquement du signe de $2e^x - 1$.

Distinguons deux cas pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1er cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0 \iff 2e^x - 1 \leqslant 0$ cad ssi $x \leqslant -\ln(2)$ ou $x \in]-\infty ; -\ln(2)]$.

2e cas: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0 \iff 2e^x - 1 \geqslant 0$ cad ssi $x \geqslant -\ln(2)$ ou $x \in [-\ln(2) ; +\infty[$.

Ainsi: f est bien croissante sur $[-\ln(2) ; +\infty[$ et même strictement croissante sur $]-\ln(2) ; +\infty[$.

5. a. Montrons que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\ln(2) ; +\infty[$:

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: **Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [\, a\, ; b]$ ou $I =]\, a\, ; b\, [$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.**

Ici:
- f est continue et définie sur IR, donc sur $]- \ln(2)\, ; +\infty\, [$,
- " $k = 2$ " est compris entre: $f(-\ln(2)) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) < 2$

  et: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty > 2$,
- f est strictement croissante sur $]- \ln(2)\, ; +\infty\, [$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 2$ ($k = 2$) admet bien une unique solution α appartenant à $]- \ln(2)\, ; +\infty\, [$.

5. b. Donnons un encadrement à 10^{-2} près de α:

A l'aide d'une calculatrice, nous trouvons comme encadrement à 10^{-2} près pour α: $1,12 < \alpha < 1,13$.