www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

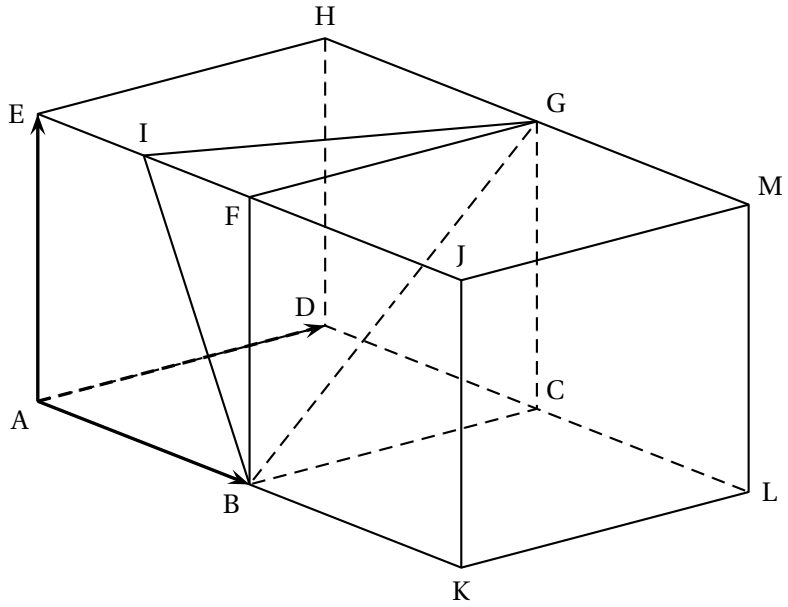
CORRIGÉ EXERCICE 1

2023

DEUX CUBES

CORRECTION

1. Montrons que le volume du tétraèdre FIGB est égal à $\frac{1}{12}$:



Dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, nous avons:

$$B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ et } J\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

De plus, comme **ABCDEFGH** et **BKLCFJMG** sont des cubes:

$$FG = BF = EH = AD = 1.$$

Freemaths : Tous droits réservés

Nous allons prendre comme **base le triangle rectangle isocèle BFG et comme hauteur du tétraèdre [FI]**.

• L'aire du triangle BFG est: $\mathcal{A} = \frac{BF \times BG}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$.

• La hauteur [FI] du tétraèdre est égale à: $FI = \frac{1}{2} EF$.

Or: $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \\ z_F - z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 0 - 0 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D'où: $EF = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$.

Par conséquent, la hauteur du tétraèdre [FI] est: $\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$.

Dans ces conditions, le volume du tétraèdre FIGB est:

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire d'une base} \times \text{hauteur correspondante}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}.$$

Le volume du tétraèdre FIGB est bien égal à: $\frac{1}{12}$.

2. Déterminons les coordonnées du point I:

Le point **I** est le milieu de [EF].

D'où: $I = \begin{pmatrix} x_I \\ y_I \\ z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_F + x_E}{2} \\ \frac{y_F + y_E}{2} \\ \frac{z_F + z_E}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Freemaths : Tous droits réservés

Les coordonnées du point I sont donc: $\left(\frac{1}{2};0;1\right)$.

3. Montrons que le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ (David Guetta) est un vecteur normal au plan (BIG):

Le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est normal au plan (BIG) ssi ce vecteur est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BIG).

Les points B, I et G ne sont pas alignés car les vecteurs $\overrightarrow{BI} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{IG} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnels.

Par conséquent, le plan (BIG) admet pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{IG}$ qui sont non colinéaires.

$\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{IG}$ définissent ainsi le plan (BIG).

Or: $\begin{cases} \overrightarrow{DJ} \text{ et } \overrightarrow{BI} \text{ sont orthogonaux ssi } \overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BI} = 0 \\ \overrightarrow{DJ} \text{ et } \overrightarrow{IG} \text{ sont orthogonaux ssi } \overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{IG} = 0. \end{cases}$

Nous avons: • $\overrightarrow{DJ} = \begin{pmatrix} x_J - x_D \\ y_J - y_D \\ z_J - z_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 0-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BI} = \left(2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right) + ((-1) \times 0) + (1 \times 1) = 0$

• $\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{IG} = \left(2 \times \left(\frac{1}{2}\right)\right) + ((-1) \times 1) + (1 \times 0) = 0.$

Freemaths : Tous droits réservés

Comme $\overrightarrow{DJ}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BI}$ et à $\overrightarrow{IG}$: le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est normal au plan (BIG).

4. Montrons qu'une équation cartésienne du plan (BIG) est $2x - y + z - 2 = 0$:

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}(a ; b ; c)$ s'écrit:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Or ici: • un vecteur normal est $\vec{n} = \overrightarrow{DJ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

• le point $I \in (BIG)$, avec $I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a(x - x_I) + b(y - y_I) + c(z - z_I) = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \times \left(x - \frac{1}{2} \right) - 1 \times (y - 0) + 1 \times (z - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 - y + z - 1 = 0$$

cad $2x - y + z - 2 = 0$.

Une équation cartésienne du plan (BIG) est donc bien: $2x - y + z - 2 = 0$.

5. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (d):

La droite (d) est orthogonale au plan (BIG) et passe par le point F.

Freemaths : Tous droits réservés

D'après le cours, nous savons que:

- Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}(a; b; c)$ un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

Ici: • la droite (d) passe par le point $F(1; 0; 1)$

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (d) est: $\vec{u} = \overrightarrow{DJ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'où une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point F et de vecteur directeur $\overrightarrow{DJ}$ $(2; -1; 1)$ s'écrit:

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \times t \\ y = 0 + (-1) \times t \\ z = 1 + 1 \times t \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

Une représentation paramétrique de la droite (d) est:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

Freemaths : Tous droits réservés

6. a. Montrons que les coordonnées du point L sont $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$:

Le point **L** est le point d'intersection entre la droite **(d)** et le plan **(BIG)**.

Les coordonnées du point **L** vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_L = 1 + 2t \quad (1) \\ y_L = -t \quad (2) \\ z_L = 1 + t \quad (3) \\ 2x_L - y_L + z_L - 2 = 0 \quad (4) \end{cases}$$

A l'aide des équations **(1)**, **(2)** et **(3)**, nous pouvons écrire:

$$(4) \iff 2x_L - y_L + z_L - 2 = 0 \iff 2 \times (1 + 2t) - (-t) + (1 + t) - 2 = 0$$

$$\iff 6t + 1 = 0$$

$$\text{cad } t = -\frac{1}{6}.$$

Les coordonnées du point L sont donc:

- $x_L = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$
- $y_L = \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$
- $z_L = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

6. b. Calculons la longueur FL: ⚠ A ne pas confondre avec la Tour !

$$FL = \sqrt{(x_L - x_F)^2 + (y_L - y_F)^2 + (z_L - z_F)^2}$$

Freemaths : Tous droits réservés

$$= \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - 0\right)^2 + \left(\frac{5}{6} - 1\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

La longueur FL est donc égale à: $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

6. c. Déduisons-en l'aire du triangle IGB:

Nous avons: $V_{FIGB} = \frac{1}{3}[\mathcal{A}(BIG) \times FL]$

$$\Leftrightarrow V_{FIGB} = \frac{1}{3}[\mathcal{A}(IGB) \times FL].$$

D'où: $\mathcal{A}(IGB) = \frac{3 \times V_{FIGB}}{FL}$.

L'aire du triangle IGB est donc: $\mathcal{A}(IGB) = \frac{3 \times \frac{1}{12}}{\frac{\sqrt{6}}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Freemaths : Tous droits réservés